

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
BENSALEM BRAHIM

PROBLÈME DE MASSE DES QUARKS
DANS LES THÉORIES DE JAUGE

NOVEMBRE 1995

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

RÉSUMÉ

Dans le modèle standard de l'interaction électrofaible, les masses et les mélanges des quarks sont des paramètres libres. Ceci est dû au fait que les masses sont générées via la brisure de la symétrie du vide en introduisant un doublet scalaire. Si la nature a choisi ce processus pour générer les masses des particules, il doit exister un boson scalaire appelé boson de Higgs.

Ce secteur est *ad hoc* et les différents paramètres y sont introduits empiriquement afin d'accommoder les résultats expérimentaux.

Dans ce mémoire, nous étudions les formes simples des matrices de masses afin de mieux comprendre le secteur de Higgs dans le Lagrangien.

Nous étudions en détail les propriétés de la matrice de mélange et ses différentes paramétrisations. L'accent est mis, d'une part, sur la paramétrisation standard et celle de Wolfenstein à cause de son importance pour la phénoménologie, et d'autre part, sur la paramétrisation de Hamzaoui puisqu'elle est exprimée en fonction des observables physiques.

Tout d'abord, nous faisons une étude exhaustive des techniques de projection de la saveur qui permettent d'exprimer les éléments de la matrice de mélange en fonction des invariants des matrices de masses.

L'atout majeur de cette nouvelle technique est qu'elle permet de contourner le problème de la diagonalisation des matrices de masses; une tâche de calcul laborieuse.

Ensuite, nous démontrons analytiquement et numériquement que l'ansatz de Fritzsch prédit une masse du quark top inférieure ou égale à 100 GeV. On doit conclure alors que cet ansatz nécessite certaines modifications.

Nous exposons les raisons et les motifs qui nous incitent à préserver ce modèle et nous présentons l'ansatz modifié de Fritzsche où l'on introduit deux nouveaux paramètres libres, α et β .

Nous démontrons que ce nouvel ansatz est capable d'accommoder la masse mesurée du quark top (174 ± 10) GeV. Nous démontrons aussi que l'ansatz de Fritzsche modifié établit une borne supérieure de la masse du top, m_t , donnée par:

$$m_t \leq \frac{\alpha + m_c - m_u}{\left(|V_{cb}| - \sqrt{\frac{m_s - m_d + \beta}{m_b}} \right)^2}$$

où les m_i sont les masses des quarks et $|V_{cb}|$ et un élément de la matrice de mélange V_{KM} .

La formulation des équations des observables de la matrice de mélange en fonction des paramètres des matrices de masses nous permet de développer une approche perturbative autour des nouveaux paramètres de l'ansatz de Fritzsche modifié. Nous obtenons alors des expressions analytiques des éléments de la matrice de mélange et nous réussissons à mettre des contraintes serrées sur les deux phases des matrices de masses.

Mots clefs: Masses, quarks, top, Kobayashi-Maskawa, Fritzsche.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	i
LISTE DES FIGURES.....	vi
LISTE DES TABLEAUX.....	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS.....	ix
LISTE DES SYMBOLES.....	x
REMERCIEMENTS.....	xii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I	
MASSES ET MÉLANGES DES QUARKS DANS LE MODÈLE STANDARD.....	4
1.1 Introduction.....	4
1.2 Le champ de Higgs et brisure spontanée de symétrie....	6
1.3 Le Lagrangien du modèle standard et origine de la brisure de la symétrie CP.....	8
1.4 Conclusion.....	15
CHAPITRE II	
PROPRIÉTÉS DES MATRICES DE MASSES ET DE MÉLANGE.....	16
2.1 Introduction.....	16

2.2	Paramétrisation de la matrice de mélange	17
2.2.1	Paramétrisation de Kobayashi-Maskawa	17
2.2.2	Paramétrisation standard	18
2.2.3	Paramétrisation de Wolfenstein	19
2.2.4	Paramétrisation de Hamzaoui	22
2.3	Rephasage, invariance et représentation géométrique	25
2.4	Techniques des opérateurs de projection de saveur	28
2.4.1	Matrice de masses hermitique	29
2.4.2	Matrice de masses non hermitique	31
CHAPITRE III		
	MODÈLE DE FRITZSCH	36
3.1	Introduction	36
3.2	Matrices de masses de Fritzsche	36
3.3	Expression des éléments de V_{KM} en fonction des éléments de M_u et M_d	37
3.4	Approximation des éléments V_{ij} de la matrice de mélange	40
3.5	Analyse graphique	45
3.6	Conclusion	48
CHAPITRE IV		
	MODÈLE DE FRITZSCH MODIFIÉ	51

4.1	Introduction	51
4.2	Expression des éléments de V_{KM} en fonction des éléments de M_u et M_d	52
4.3	Contraintes sur les paramètres α et β	56
4.4	Diagonalisation de la matrice de Fritzsch modifiée	58
4.5	Approximation des éléments des matrices O_u et O_d	63
4.6	Approximation des éléments V_{ij} de la matrice de mélange	68
4.7	Analyse graphique	70
4.8	Discussion	76
	CONCLUSION GÉNÉRALE	80
	APPENDICE A	
	SYMÉTRIES DISCRÈTES ET THÉORÈME CPT	82
	BIBLIOGRAPHIE	89

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
2.1	Représentation géométrique de $V_{td}V_{tb}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{ud}V_{ub}^* = 0$	26
2.2	Représentation géométrique de $V_{td} + V_{cd}V_{cb}^* + V_{ub}^* = 0$	26
2.3	Représentation géométrique de $V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^* + V_{td}V_{cb}V_{tb}^*V_{cd}^* + V_{cd} ^2 V_{cb} ^2 = 0$	27
3.1	a) $ V_{cb} = f(m_t)$ pour $\delta_x = 0$ et $\delta_b = 0$ b) $ V_{cb} = f(m_t)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{4}$ et $\delta_b = \frac{\pi}{4}$	45
3.2	a) $ V_{cb} = f(m_t)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$ b) $ V_{cb} = f(m_t)$ pour $\delta_x = \pi$ et $\delta_b = 0$	46
3.3	$ V_{cb} = f(m_t)$ pour $\delta_x = \frac{3\pi}{4}$ et $\delta_b = \frac{\pi}{4}$	47
3.4	Contour de $ V_{cb} = f(m_t)$ pour: a) $\delta_x = 0$ b) $\delta_x = \frac{\pi}{4}$ c) $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ d) $\delta_x = \frac{3\pi}{4}$	49
3.5	Contour de $ V_{cb} = f(m_t)$ pour $\delta_b = 0$	50
4.1	a) Borne inférieure de $ V_{cb} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$. b) Borne inférieure de $ V_{cb} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = \frac{\pi}{2}$	73
4.2	a) Borne inférieure de $ V_{cb} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = \pi$. b) Contour de la borne inférieure de $ V_{cb} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$	74

4.3	a) Contour de $ V_{cb} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$ et $\delta_x = \frac{\pi}{2}$	
	b) Contour de la borne inférieure de $ V_{ub} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$.	
	c) Contour de $ V_{ub} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$.	
	d) Contour de $ V_{us} = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$	75
4.4	a) Borne supérieure de m_t pour $\alpha = m_c$	
	b) Borne supérieure de m_t pour $\alpha = 2m_c$	
	b) Borne supérieure de m_t pour $\alpha = 3m_c$	78

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
1.1	Masses des quarks et des leptons.....	1
A.1	Transformation des champs sous la symétrie P	83
A.2	Transformation des champs sous la conjugaison de charge C	85
A.3	Transformation des champs sous renversement du temps T	86
A.4	Transformation des champs sous la symétrie CP	87
A.5	Transformation des champs sous la symétrie CPT	88

LISTE DES ABRÉVIATIONS

B.S.S	Brisure spontanée de symétrie
C.D.Q	Chromodynamique quantique
GeV	Giga electron-Volt
M.S.	Modèle standard
m_b	Masse du quark bottom
m_c	Masse du quark charm
m_d	Masse du quark down
m_s	Masse du quark strange
m_t	Masse du quark top
m_u	Masse du quark up

LISTE DES SYMBOLES

C	Opérateur de symétrie de conjugaison de charge
CP	Opérateur de symétrie charge-parité
CPT	Opérateur de symétrie charge-parité-renversement du temps
Det	Déterminant
e_L	Fermions gauches
e_R	Fermions droits
H	Champs de Higgs
J	Mesure de la brisure de la symétrie CP
J_μ	Quadri-vecteur courant
L	Le lagrangien
L_L	Lepton gauche
M_d	Matrice des masses des quarks de type down
M_d^D	Matrice diagonale des masses des quarks de type down
M_u	Matrice des masses des quarks de type up
M_u^D	Matrice diagonale des masses des quarks de type up
O	Matrice orthogonale
P_u	Matrice de rephasage du secteur up
P_d	Matrice de rephasage du secteur down
q_L	Champ des quarks gauches
q_R	Champ des quarks droits
SU(2)	Groupe d'isospin faible
$SU(2)_L$	Représentation Left-handed de SU(2)
T	Transposition matricielle
$T_{i\alpha j\beta}$	Tenseur de rang quatre
Tr	Trace
U	Matrice unitaire qui diagonalise M_u

$U(1)$	Groupe unitaire d'ordre 1
$U(1)_Y$	Groupe des hypercharges
V_{KM}	Matrice de Kobayashi-Maskawa
V	Matrice unitaire qui diagonalise M_d
V_Φ	Potentiel de Higgs
W^\pm	Bosons de jauge chargés
X_C	Courants chargés
Y_{jk}	Constante de couplage de Yukawa
Z	Boson de jauge neutre
γ_i	Matrices de Dirac
$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$	Tenseur antisymétrique d'ordre 3

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à remercier tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail. Mes remerciements vont d'abord à M. G. Couture et M. C. Hamzaoui, pour m'avoir accueilli dans leur groupe de recherche. M. C. Hamzaoui m'a particulièrement consacré beaucoup de son temps, qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Toute ma gratitude et ma reconnaissance vont à M. J. C. Zanghi, directeur des études supérieures, qui m'a aidé tout le long de ce travail. Sans son aide et ses encouragements, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

L'assistance et le soutien de M. H. König, à qui revient le mérite de m'initier à la physique des particules, m'ont été bénéfiques. Qu'il trouve ici l'expression de ma sincère gratitude.

Enfin je ne trouve pas les mots pour exprimer ma reconnaissance à ma sœur Aïcha pour sa patience et sa compréhension, et à tous les membres de ma famille qui, malgré la distance, n'ont cessé de m'encourager.

Qu'il me soit permis d'ajouter une pensée pour mon père et mon frère Tarik puisque les mots ne peuvent traduire qu'imparfaitement mes sentiments à leurs égards.

Mes remerciements vont aussi à mes amis et collègues F. Jamal et C. Ezze-dine pour leur aide concernant les aspects informatiques de ce travail.

INTRODUCTION

L'un des problèmes non résolus en physique des hautes énergies est le problème des masses des fermions et de leur mélange. Les mesures expérimentales sont les seuls moyens à la disposition des physiciens pour la détermination des masses des fermions et de leur mélange [1]. Les valeurs les plus récentes sont résumées dans le tableau suivant [1]:

Tableau 1.1

Masses des quarks et des leptons

Leptons (GeV)		Quarks (GeV)	
e	$0.511 \cdot 10^{-3}$	u	0.005
μ	$105.65 \cdot 10^{-3}$	c	1.3
τ	1.777	t	174.0
		d	0.008
		s	0.15
		b	5

Le modèle standard [2] de l'interaction électrofaible, (M.S.), malgré son succès remarquable et son accord avec l'expérience, présente plusieurs aspects insatisfaisants. Parmi ses imperfections, on retrouve le grand nombre de paramètres arbitraires auxquels il doit faire appel. Le M.S. n'explique pas pourquoi il y a trois générations de fermions. La brisure de symétrie CP ainsi que les masses ne sont pas prédites par le modèle, par contre elles sont introduites à la main [3].

Dans le modèle standard de l'interaction électrofaible, il y a une seule échelle de masse $v \sim 250 \text{ GeV}$ [4], celle de la valeur moyenne du champ de Higgs dans le vide (état fondamental). Les masses des quarks et des leptons sont

toutes arbitraires parce que le M.S. ne fixe pas les constantes de couplage Higgs-fermions.

À cause de la présence de trois générations de fermions, les états propres de l'interaction faible ne sont pas nécessairement les états propres des masses. Ceci rend le mélange des quarks inévitable. Dans le M.S., le mélange des quarks est décrit par la matrice de Kobayashi-Maskawa (V_{KM}) [5] dont les éléments sont des paramètres libres. De plus, le M.S. ne peut pas prédire individuellement les éléments de la matrice de mélange des quarks. Cependant, le modèle exige qu'elle soit unitaire.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étudier le problème de masse des quarks, celui des leptons ne fera pas partie de notre étude.

Pour réduire le nombre de paramètres libres dans le secteur des masses et mélanges des quarks, plusieurs approches ont été suggérées. L'approche la plus populaire est celle qui consiste à postuler une forme particulière pour les matrices de masse (ansatz) et essayer de satisfaire les données expérimentales.

Dans le cadre de cette approche, plusieurs auteurs ont suggéré des formes spécifiques "raisonnables" de la matrice de masse des quarks puisque ce sont ces matrices qui sont à l'origine des masses et des mélanges [6]. Les formes des matrices des masses ont été soit inspirées par des modèles de jauge, soit dérivées par imposition de principes externes tels que des symétries discrètes, structures hiérarchiques, mélange des voisins les plus proches, etc... À partir des matrices de masse, on peut calculer les valeurs propres (masses des quarks) et les mélanges en fonction des paramètres du modèle.

Parmi ces ansatz, on retrouve l'ansatz de Fritzsche, l'ansatz de Stech, l'ansatz de Gronau, l'ansatz de Johnson et Sechter [6], etc...

L'ansatz de Fritzsche est celui qui a le plus de succès grâce à son élégance. Cependant, il a été démontré que la masse du quark top prédite par cet ansatz est inférieure à 100 GeV [7]. Ceci présente un problème sérieux puisque la masse du top a été mesurée expérimentalement et a une valeur de (174 ± 10) GeV [8].

Nous allons montrer dans ce mémoire, qu'au lieu d'abandonner l'ansatz de Fritzsch, il est possible de préserver son élégance en optant pour une version légèrement modifiée.

Nous allons montrer aussi que ce nouvel ansatz peut accommoder une masse du top aussi grande que sa valeur expérimentale (174 ± 10) GeV tout en reproduisant les bonnes expressions des éléments de la matrice de mélange V_{KM} en fonction des masses des quarks et des phases des matrices des masses. Nous allons montrer que ceci est dû au fait que le mélange des deux premières générations est peu affecté par les nouveaux paramètres de l'ansatz de Fritzsch modifié.

CHAPITRE I

MASSE ET MÉLANGE DES QUARKS DANS LE MODÈLE STANDARD

1.1 Introduction

Les leptons et les quarks sont les fermions fondamentaux dans la nature, ils sont regroupés en trois familles [2]. Les leptons et les quarks gauches sont des doublets :

$$q_{Li} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L, \quad \begin{cases} u_i = u, c, t \\ d_i = d, s, b \end{cases}, \quad L_{li} = \begin{pmatrix} \nu_{ei} \\ e_i \end{pmatrix}_L \quad \begin{cases} \nu_{ei} = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \\ e_i = e, \mu, \tau \end{cases}$$

et les leptons et les quarks droits sont des singulets:

$$\begin{aligned} q_{Ri}, \quad q_{Ri} &= u_R, c_R, t_R; d_R, s_R, b_R \\ e_{Ri}, \quad e_{Ri} &= e_R, \mu_R, \tau_R \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

La désintégration β nous apprend que seul le neutrino gauche prend part à l'interaction faible. À chacune de ces particules correspond un opérateur de champ de Dirac. Premièrement, on considère seulement le doublet $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, la généralisation aux deux autres familles est directe. Le spineur du quark u peut être divisé en deux parties, une droite et une gauche:

$$u(x) = u_L(x) + u_R(x)$$

où

$$\begin{aligned} u_L(x) &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(x) \\ u_R(x) &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)u(x) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Le spineur du quark d se décompose de façon analogue à celui du quark u en une partie droite et une autre gauche. u_L et u_R ne sont pas solution de l'équation de Dirac à cause du terme de masse de u . Mais la masse de u ($m_u = 5$ MeV) est très petite en comparaison avec les énergies de quelques GeV voire de 100 GeV ou plus que l'on retrouve typiquement dans les expériences à haute énergie. Nous pouvons approximer le monde réel en considérant u sans masse. On suppose pour démarrer, qu'il n'y a pas de couplage électromagnétique ni électrofaible. Il reste quatre champs, u_L , u_R , d_L et d_R . La densité lagrangienne correspondante est:

$$L_0(x) = (\bar{u}, \bar{d})(i\gamma^\lambda \partial_\lambda) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{d}_R i\gamma^\lambda \partial_\lambda d_R + \bar{u}_R i\gamma^\lambda \partial_\lambda u_R \quad (1.1.3)$$

Cette densité lagrangienne est invariante sous une rotation arbitraire $SU(2)$ dans l'espace ν_{u_L} et d_L

$$L_0 \xrightarrow{U} L_0$$

si

$$\begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

Cette transformation est une transformation de jauge globale. Nous postulons l'invariance de la théorie sous une transformation locale où $U(x) \in SU(2)$ pour chaque x . Pour que L_0 soit invariant sous une transformation de jauge locale, on doit introduire trois champs vectoriels; au même nombre que les générateurs du groupe $SU(2)$ (nombre de générateurs = $n^2 - 1$). Les matrices de Pauli, τ_1, τ_2 et τ_3 sont des générateurs du groupe $SU(2)$. Les champs vectoriels correspondants sont W_λ^1, W_λ^2 et W_λ^3 . Nous les combinons pour avoir des matrices hermitiques 2×2 de traces nulles. $W_\lambda(x) = W_\lambda^a(x) \frac{\tau_a}{2}$. Nous définissons le tenseur de champs:

$$W_{\lambda\rho}(x) = \partial_\lambda W_\rho(x) - \partial_\rho W_\lambda(x) + ig[W_\lambda(x), W_\rho(x)] = W_{\lambda\rho}^a(x) \frac{\tau_a}{2}. \quad (1.1.5)$$

où $W_{\lambda\rho}^a(x) = \partial_\lambda W_\rho^a(x) - \partial_\rho W_\lambda^a(x) - g\epsilon_{abc}W_\lambda^b(x)W_\rho^c(x)$ où ϵ_{abc} sont les constantes de structure du groupe SU(2) et g est la constante de couplage de jauge. La densité lagrangienne pour u , d et les champs W est donnée par :

$$L(x) = \frac{1}{2}Tr(W_{\lambda\rho}(x)W^{\lambda\rho}(x)) + (\overline{u}_L(x), \overline{d}_L(x))i\gamma^\lambda(\partial_\lambda + igW_\lambda)\begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} + \overline{u}_R(x)i\gamma^\lambda\partial_\lambda u_R(x) + \overline{d}_R(x)i\gamma^\lambda\partial_\lambda d_R(x) \quad (1.1.6)$$

Il est clair que ce lagrangien ne peut pas générer des termes de masse pour les bosons de jauge. Ce lagrangien est invariant sous une transformation de jauge de SU(2). Quand

$$W_\lambda(x) \rightarrow U(x)W_\lambda(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\lambda U^\dagger(x) \quad (1.1.7)$$

$$\begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} \rightarrow U(x)\begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

et

$$u_R(x) \rightarrow u_R(x) \quad (1.1.9)$$

nous obtenons

$$L(x) \rightarrow L(x). \quad (1.1.10)$$

SU(2) est appelé groupe d'isospin faible.

1.2 Le champ de Higgs et la brisure spontanée de symétrie

On parle de brisure spontanée de symétrie quand le lagrangien d'un système possède une symétrie qui n'est pas partagée par son état fondamental.

Cette idée de brisure de symétrie joue un rôle crucial dans la théorie de l'interaction électrofaible. L'idée est que l'interaction faible est véhiculée par les bosons de jauge W^\pm qui, comme on l'a vu, n'ont pas de masse. Le lagrangien contient aussi des termes correspondant aux électrons sans masse, neutrinos et muons sans masse. Il est invariant sous la symétrie interne SU(2), dite symétrie de jauge. Un champ scalaire de Higgs [2] est donc introduit avec un

état fondamental de valeur moyenne non nulle. La brisure spontanée de symétrie donne une masse à l'électron, au muon, au tau et aux bosons de jauge tout en laissant le photon et le neutrino sans masses. Nous introduisons deux champs scalaires complexes de Higgs Φ_1 et Φ_2 à partir desquels on forme un doublet $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ et on demande que ce champ soit un doublet sous la transformation du groupe d'isospin faible SU(2). Nous cherchons donc une densité lagrangienne L_Φ qui soit invariante sous une transformation SU(2). Nous voulons que la théorie soit renormalisable, ce qui exige que toutes les constantes de couplage doivent être sans dimension ou avoir la dimension d'une puissance positive de masse. Donc la densité lagrangienne devrait avoir la forme suivante:

$$L_\Phi = (\partial_\mu \Phi^\dagger)(\partial^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (1.2.1)$$

où

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.2.2)$$

On demande à λ d'être positive pour assurer la stabilité. Si $\mu^2 > 0$, $V(\Phi)$ aura un minimum absolu à $\Phi = 0$. Quand $\mu^2 < 0$, le potentiel possède un minimum à une valeur non nulle Φ_c qui satisfait: $|\Phi_c|^2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\lambda}$. En théorie quantique des champs, on parle d'une valeur moyenne non nulle de l'état physique du vide.

La contrainte est seulement sur le module du champ. L'orientation est arbitraire. Il en résulte que l'état fondamental est infiniment dégénéré. Comme la théorie des perturbations est formulée pour des champs ayant un état fondamental $\neq 0$, il est donc approprié de redéfinir le doublet scalaire Φ comme suit:

$$\Phi(x) = e^{\frac{i\xi \cdot x}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(v+H(x))}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

où les valeurs moyennes du vide de tous les champs réels ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 et $H(x)$ sont non nulles. Aucune de ces infinités d'états n'est invariante sous une rotation SU(2). Donc la symétrie SU(2), qui est une symétrie du lagrangien, est spontanément brisée par l'état fondamental.

Ensuite, grâce à la liberté de rotation du champ de Higgs dans l'espace des isospins $SU(2)_L$, on peut absorber le facteur de phase de $\Phi(x)$ et du même coup éliminer $\xi(x)$ du lagrangien. Le champ devient donc:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

L'expression de la dérivée covariante D_μ en fonction des champs A_μ , W_μ^\pm et Z_μ est:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + i\frac{1}{\sqrt{2}}g(\tau^+W_\mu^+ + \tau^-W_\mu^-) + ig_Z(\frac{1}{2}\tau_3 - x_WQ)Z_\mu \quad (1.2.5)$$

$$g_Z = \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} = \frac{g}{\cos\theta_W}, \quad x_W = \sin^2\theta_W \quad (1.2.6)$$

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.7)$$

$$D_\mu\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}igW_\mu^+(v+H) \\ \partial_\mu H - \frac{1}{2}ig_ZZ_\mu(v+H) \end{pmatrix} \quad (1.2.8)$$

En remplaçant la dérivée partielle par la dérivée covariante L_Φ devient:

$$L_\Phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{4}g^2W_\mu^+W^{\mu-}(v+H)^2 + \frac{1}{8}g_Z^2Z_\mu Z^\mu(v+H)^2 - v[\frac{1}{2}(v+H)^2] \quad (1.2.9)$$

On peut identifier les termes de masse des bosons W et Z , $M_W = \frac{1}{2}gv$ et $M_Z = \frac{1}{2}g_Zv$, tandis que le photon reste sans masse.

1.3 Le Lagrangien du M.S. et l'origine de la brisure de la symétrie CP

La forme générale de la densité lagrangienne du M.S. est donnée par

$$L = L(f, G) + L(f, H) + L(G, H) + L(G) - V(H). \quad (1.3.1)$$

où f désigne les fermions, H le doublet de Higgs et G les bosons de jauge.

$L(f, G)$: le lagrangien de l'interaction des fermions avec les bosons de jauge.

$L(f, H)$: le lagrangien de l'interaction des fermions avec le Higgs.

$L(G, H)$: le lagrangien de l'interaction des bosons de jauge avec le Higgs.

Considérons le secteur hadronique de la théorie, le secteur leptonique se traite de la même façon. $L(f, G)$ est le terme qui donne l'interaction des fermions avec les bosons de jauge. Il s'écrit comme suit [3]:

$$\begin{aligned} L(f, G) = \sum_{j=1}^N & \left[\overline{(q, q')_{jL}} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu I - ig_2 \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i - ig_1 \frac{1}{6} B_\mu I \right) \begin{pmatrix} q_{jL} \\ q'_{jL} \end{pmatrix} \right. \\ & + \overline{q_{jR}} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 \left(\frac{2}{3} \right) B_\mu I \right) q_{jR} \\ & \left. + \overline{q'_{jR}} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 \left(\frac{-1}{3} \right) B_\mu I \right) q'_{jR} \right] \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

où I est la matrice identité et $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, et $\frac{-1}{3}$ sont les valeurs propres de l'hypercharge Y , générateur de $U(1)$, qui est construite de sorte que $Q = I_3 + Y$ ait les valeurs propres $2/3$ pour les quarks de type "up" et $-1/3$ pour les quarks de type "down". L'interaction des fermions avec le doublet de Higgs est donnée par:

$$L(f, H) = \sum_{j,k=1}^N \left[Y_{jk} \overline{(q, q')_{jL}} \begin{pmatrix} \Phi^{(0)*} \\ -\Phi^{(-)} \end{pmatrix} q_{kR} + Y'_{jk} \overline{(q, q')_{jL}} \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(0)} \end{pmatrix} q'_{kR} + h.c \right] \quad (1.3.3)$$

où Y_{jk} et Y'_{jk} sont les couplages de Yukawa qui sont des nombres complexes arbitraires dans le modèle standard [10].

$$H = \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(0)} \end{pmatrix} \text{ et } H^c = \begin{pmatrix} \Phi^{(0)*} \\ -\Phi^{(-)} \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

sont respectivement le champ scalaire de Higgs et son conjugué.

$$\Phi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2) \text{ et } \Phi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_0 + i\Phi_3) \quad (1.3.5)$$

qui correspondent à quatre champs scalaires réels. H^c est choisit au lieu de H^* car ce dernier ne se transforme pas comme doublet sous $SU(2)$

$$H^* \rightarrow U^*(\alpha)H^* \neq U(\alpha)H^* \quad (1.3.6)$$

Mais

$$H^c \rightarrow U(\alpha)H^c \quad (1.3.7)$$

L'invariance sous $U(1)$ est garantie en exigeant la conservation de la charge. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, sous la brisure spontanée de symétrie, (B.S.S.), le champ Φ_0 est décalé, $\Phi_0 \rightarrow \Phi_0 + v$, où v est la valeur moyenne du niveau fondamental du champ Φ_0 , et les trois champs Φ_j , $j = 1, 2, 3$ ont été absorbés par les bosons Z et W^\pm qui deviennent massifs. Après B.S.S., dans l'expression de $L(f, H)$ donnée par (1.3.3) il ne reste que les termes impliquant Φ_0

$$L(f, H) \xrightarrow{BSS} - \sum_{j,k=1}^N \left[m_{jk} \overline{q_{jL}} q_{kR} + m'_{jk} \overline{q'_{jL}} q'_{kR} + h.c \right] \left(1 + \frac{1}{v} \Phi_0 \right) \quad (1.3.8)$$

où $m_{jk} = -\frac{v}{\sqrt{2}} Y_{jk}$, $m'_{jk} = -\frac{v}{\sqrt{2}} Y'_{jk}$ sont les matrices de masse des quarks.

Nous allons montrer que l'expression (1.3.8) de $L(f, H)$, brise formellement les symétries discrètes C, P et CP (App. A). Nous mentionnons à ce stade, que (1.3.8), ne donne pas l'expression de $L(f, H)$ dans la base physique. L'importance de cette remarque sera claire plus tard quand nous montrerons que ce même lagrangien, $L(f, H)$, une fois exprimé en termes des champs physiques, conserve automatiquement C, P et donc CP.

Soit E , le terme dans $L(f, H)$ impliquant les quarks de type "up". Étudions sa transformation sous les symétries discrètes C, P et CP.

$$\begin{aligned} E &= m_{jk} \overline{q_{jL}} q_{kR} + h.c = \frac{1}{2} \left[m_{jk} \overline{q_j} (1 + \gamma_5) q_k + m_{jk}^* \overline{q_k} (1 - \gamma_5) q_j \right] \\ &= \frac{1}{2} \overline{q} \left[(m + m^\dagger) + (m - m^\dagger) \gamma_5 \right] q \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Donc la parité est conservée si la matrice de masse est hermitique. Dans ce cas $m = m^\dagger$ et $(m - m^\dagger) \gamma_5 = 0$. En utilisant les propriétés des transformations des champs sous les symétries discrètes (App. A), la transformation de E sous l'opération de conjugaison de charge C est donnée par

$$\overline{q} \left[(m + m^\dagger)^T + (m - m^\dagger)^T \gamma_5 \right] q \quad (1.3.10)$$

où T dénote la transposition matricielle.

Pour que C soit une bonne symétrie, m doit être symétrique. Sous l'opération CP (App. A), E devient:

$$\bar{q} \left[(m + m^\dagger)^T - (m - m^\dagger)^T \gamma_5 \right] q \quad (1.3.11)$$

Pour que E soit invariante sous CP, il faut que m soit réelle, donc $m = m^*$, $m' = m'^*$. Il faut noter toutefois que nous sommes en présence des champs non physiques, puisque la théorie ici n'est pas écrite dans la base physique. Pour trouver les champs physiques, il faut diagonaliser les matrices de masse des quarks m et m' . Or nous savons que toute matrice carrée, hermitique ou non, est diagonalisable à l'aide de deux matrices unitaires. Donc:

$$U_L m U_R^\dagger = D = \text{Diag}(m_u, m_c, m_t) \quad (1.3.12)$$

$$U'_L m' U_R'^\dagger = D' = \text{Diag}(m_d, m_s, m_b) \quad (1.3.13)$$

où U_L, U_R sont telles que $U_L U_L^\dagger = U_R U_R^\dagger = 1$.

Pour trouver U_L , nous multiplions l'équation (1.3.12) par son conjugué hermitique.

$$U_L m U_R^\dagger U_R m^\dagger U_L^\dagger = U_L m m^\dagger U_L^\dagger = D^2 = \text{Diag}(m_u^2, m_c^2, m_t^2) \quad (1.3.14)$$

U_L diagonalise $m m^\dagger$; de même U_R diagonalise $m^\dagger m$.

En substituant (1.3.12) et (1.3.13) dans l'expression (1.3.8) du $L(f, H)$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \overline{q_{jL}} m_{jk} q_{kR} &= \overline{q_L} m q_R = \overline{q_L} U_L^\dagger \underbrace{U_L m U_R^\dagger}_D U_R q_R \\ &= \overline{U_L q_L} D U_R q_R \\ &= \overline{U_L q_L} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} U_R q_R \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Donc les champs physiques sont:

$$q_L^{phys} = U_L q_L = U_L \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}; \quad (1.3.16)$$

$$q_L'^{phys} = U'_L q'_L = U'_L \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad (1.3.17)$$

De même pour les quarks droits, où $L \rightarrow R$ dans l'équation précédente.

En substituant dans l'équation de $L(f, H)$, nous trouvons:

$$\begin{aligned}
 L^{phys}(f, H) &= - \left(1 + \frac{\Phi_0}{v}\right) \left[m_u \bar{u} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right) u + m_c \bar{c} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right) c + m_t \bar{t} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right) t \right. \\
 &\quad \left. + \text{termes en } d, s \text{ et } b \right] + h.c. \\
 &= - \left(1 + \frac{\Phi_0}{v}\right) \left[m_u \bar{u} u + m_c \bar{c} c + m_t \bar{t} t + m_d \bar{d} d + m_s \bar{s} s + m_b \bar{b} b \right]
 \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

$L^{phys}(f, H)$, contrairement à $L(f, H)$ a la propriété importante de conserver C, P et donc CP aussi. De plus, nous apprenons que la symétrie d'un lagrangien n'a pas nécessairement d'implication physique si ce lagrangien n'est pas exprimé dans la base physique. À partir des deux matrices de masse m et m' , on a trouvé quatre matrices unitaires (U_L, U_R, U'_L et U'_R) qui diagonalisent m et m' . Nous avons aussi établi la relation entre les champs physiques et les champs non physiques. Dans l'expression de $L^{phys}(f, H)$, il n'y a plus de trace de U et U' et l'interaction du Higgs avec les fermions conserve automatiquement C et P et conserve aussi la saveur.

Il reste à exprimer $L(f, G)$ en termes des champs physiques des quarks. Prenons tout d'abord un terme de courant neutre du lagrangien $L(f, G)$. (i.e n'impliquant que les quarks de type up ou down). Soit $E_N(x, t)$ le terme donné par:

$$\begin{aligned}
 E_N(x, t) &= \overline{q_{jR}} \gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig_1 \left(\frac{2}{3}\right) B_\mu \right] q_{jR} \\
 &= \overline{q'_R} U_R \gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig_1 \left(\frac{2}{3}\right) B_\mu \right] U_R^\dagger q'_R \\
 &= \overline{q'_R} \gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig_1 \left(\frac{2}{3}\right) B_\mu \right] q'_R
 \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

On voit qu'il n'y a pas ici de courants de changement de saveurs. Ceci est dû aux facteurs suivants. Premièrement ces expressions contiennent seulement des termes "droits" ou "gauches" et jamais les deux à la fois. Ceci résulte en la conservation de la saveur. Deuxièmement, puisque les matrices, U et U' sont

unitaires, la conservation de saveur implique que les termes des courants neutres ne contiennent pas de termes de la forme: $\bar{u}\gamma^\mu(a + b\gamma_5)c$ (mécanisme de GIM). Les autres constituants de $L(f, G)$ sont les termes des courants chargés. Ces termes conservent l'hélicité mais pas la saveur. Ils mélangent les quarks de type "up" aux quarks de type "down" du fait que W^\pm transportent une charge unitaire.

Puisque les courants chargés impliquent seulement les quarks "gauches", les matrices d'indice R n'entrent pas du tout et la matrice U_L est multipliée par $U_L^{\dagger'}$. Le produit $U_L U_L^{\dagger'}$ n'est pas nécessairement l'identité, mais il doit être unitaire. Les termes des courants chargés sont donnés par:

$$\begin{aligned} X_c &= [W_\mu^1 - iW_\mu^2] \bar{q}_L \gamma^\mu q_L' + h.c \\ &= [W_\mu^1 - iW_\mu^2] \bar{q}_L^{phys} \gamma^\mu U_L U_L^{\dagger'} q_L'^{phys} + h.c \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

en posant $V = U_L U_L^{\dagger'}$, X_c sera:

$$X_C = [W_\mu^1 - iW_\mu^2] J_c^\mu$$

où

$$J_c^\mu = \overline{(u, c, t)}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \quad (1.3.21)$$

V est la matrice de mélange des quarks.

Les courants chargés sont responsables de la brisure de symétrie CP dans le modèle standard. X_c brise "maximalement" C et P puisque la partie axiale de l'interaction a la même intensité que la partie vectorielle de l'interaction. Il s'écrit:

$$X_c = [W_\mu^1 - iW_\mu^2] \bar{q}_j \gamma^\mu V_{jk} (1 - \gamma_5) q_k' + [W_\mu^1 + iW_\mu^2] \bar{q}_k' \gamma^\mu V_{jk}^* (1 - \gamma_5) q_j \quad (1.3.22)$$

$$\xrightarrow{CP} [W_\mu^1 + iW_\mu^2] \bar{q}_k' \gamma^\mu V_{jk} (1 - \gamma_5) q_j + [W_\mu^1 - iW_\mu^2] \bar{q}_j \gamma^\mu V_{jk}^* (1 - \gamma_5) q_k' \quad (1.3.23)$$

L'argument (x, t) des champs se transforme en $(-x, t)$ sous l'action de CP (App. A). Il en résulte que $V_{jk}^* = V_{jk}$, pour que CP soit conservée. Ce qui revient à dire que la matrice doit être réelle afin de conserver CP. Donc la matrice doit être réelle modulo des phases mesurables. Puisque la phase d'une fonction d'onde n'est pas une quantité observable (ψ et $e^{i\alpha}\psi$, où α est réelle, sont physiquement équivalentes), celles qui sont mesurables sont les phases relatives des différents champs. Nous devons donc déterminer quelles sont les phases mesurables dans V et quelles sont celles qui ne sont pas mesurables. Nous avons la liberté de les redéfinir comme suit:

$$q_L \longrightarrow e^{i\Phi(q)} q_L \quad (1.3.24)$$

$\Phi(q)$, $q = u, c, t, d, s, b$ sont des nombres réels. Il y aura donc six quantités pour le cas de trois familles. V se transforme comme suit:

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\Phi(u)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi(c)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\Phi(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Phi(u)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\Phi(c)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Phi(t)} \end{pmatrix} \quad (1.3.25)$$

$$V_{\alpha j} \rightarrow e^{i(\Phi(j) - \Phi(\alpha))} V_{\alpha j} \quad (1.3.26)$$

$j \rightarrow q$ de type "up". $\alpha \rightarrow q$ de type "down". Pour que ce rephasage laisse invariant le lagrangien du modèle, il faut soumettre les champs droits des quarks au même rephasage faute de quoi la partie $L(f, H)$ ne sera pas invariante puisqu'elle mélange les "L" avec les "R". Une matrice $N \times N$ unitaire a N^2 paramètres. $N(\frac{N-1}{2})$ de ces paramètres peuvent être associés aux angles d'Euler. Les paramètres restants sont les phases. Nous avons vu que $(2N - 1)$ de ces phases ne sont pas mesurables. Il y a $2N$ phases non mesurables, $\phi(j)$ et $\Phi(\alpha)$, mais seulement $2N-1$ différences de phases apparaissent dans l'expression de $V_{\alpha j}$, donc V a $N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2$ paramètres dont $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ phases et $\frac{N(N-1)}{2}$ rotations. Quand $N = 2$, le modèle à deux familles, nous avons une rotation et aucune phase. La matrice de mélange s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.3.27)$$

qui correspond à la matrice de Cabibbo [11]. La présence de la matrice orthogonale de Cabibbo explique l'absence des courants neutres de changement de saveur. Avec deux familles, la matrice de mélange est automatiquement réelle et donc CP est conservée. Or on sait à partir de plusieurs expériences, que la symétrie CP est brisée. Pour remédier à cet inconvénient, une solution proposée par Kobayashi et Maskawa est d'étendre le modèle à trois familles. Pour $n = 3$, nous avons trois rotations et une phase responsable de la brisure de la symétrie CP.

1.4 Conclusion:

Les courants chargés sont responsables de la brisure de la symétrie CP et nous avons conclu que le modèle standard ne peut rendre compte du phénomène physique de la brisure de CP qu'en considérant un nombre de familles $n \geq 3$, tel que suggéré par Kobayashi et Maskawa [6]. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude des propriétés de la matrice de mélange et sa paramétrisation.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DES MATRICES DE MASSES ET DE MÉLANGE

2.1 Introduction

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la matrice de mélange V_{KM} est une matrice 3×3 unitaire. Les valeurs expérimentales de ses éléments sont données par la matrice suivante [1]:

$$\begin{pmatrix} 0.9747 \text{ à } 0.9759 & 0.218 \text{ à } 0.224 & 0.002 \text{ à } 0.005 \\ 0.218 \text{ à } 0.224 & 0.9738 \text{ à } 0.9752 & 0.032 \text{ à } 0.048 \\ 0.004 \text{ à } 0.015 & 0.030 \text{ à } 0.048 & 0.9988 \text{ à } 0.9995 \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

Elle peut donc être paramétrisée par 9 paramètres indépendants. Pour une matrice 3×3 quelconque, le nombre de paramètres est 18 paramètres complexes. Ce nombre est réduit à 9 par les contraintes d'unitarité suivantes: $V_{\alpha\beta}^\dagger V_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$. Cependant, on a la liberté d'absorber une phase dans le champ gauche:

$$q_L \rightarrow e^{i\alpha(q_L)} q_L \quad (2.1.2)$$

ce qui enlève une phase arbitraire de chaque ligne de V . Puisque V n'est pas affecté par une transformation de phase commune à tous les q_L , seulement $6 - 1 = 5$ degrés de liberté des phases peuvent être éliminés de cette façon. V_{KM} peut être donc exprimée en terme de seulement $9 - 5 = 4$ paramètres physiques indépendants.

Différentes paramétrisations de la matrice V_{KM} ainsi que le choix des paramètres indépendants ont été traités par plusieurs auteurs [11]. Dans ce qui suit, on va étudier certaines des paramétrisations les plus populaires.

2.2 Paramétrisation de la matrice de mélange

Certainement, toutes les paramétrisations de la matrice de mélange sont équivalentes et la physique reste la même quelle que soit la paramétrisation. La seule chose que nous pourrions gagner est que la physique soit plus simple et transparente dans l'une de ces paramétrisations. Parmi ces paramétrisations, Kobayashi et Maskawa [5] ont montré que pour $n = 3$, la matrice de mélange des quarks peut être paramétrisée par trois angles et une phase.

2.2.1 Paramétrisation de Kobayashi-Maskawa

Comme le nom l'indique, cette paramétrisation est due à Kobayashi et Maskawa [5]. Ils ont été les premiers à montrer que dans le cas de trois générations, la matrice de mélange peut être paramétrisée par un produit de trois matrices de rotations R et d'une matrice d'insertion de phase D comme suit:

$$V = R_2(-\theta_2)R_1(-\theta_1)D(\delta - \pi)R_2(\theta_3) \quad (2.2.1.1)$$

où

$$\begin{aligned} R_1(\theta_1) &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ D(\delta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}; \quad R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.1.2)$$

où $c_i = \cos(\theta_i)$, $s_i = \sin(\theta_i)$.

V sera donc:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (2.2.1.3)$$

Par un choix judicieux des signes des champs des quarks on peut restreindre les angles aux intervalles: $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \delta \leq 2\pi$.

La phase δ est responsable de la brisure de CP. Dans la littérature, une forme alternative de la matrice V_{KM} est aussi utilisée, on remplace δ par $\delta + \pi$ et θ_1 par $-\theta_1$.

Dans la limite où $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\delta = \pi$, V_{KM} se réduit à la matrice de rotation de Cabibbo.

$$V = R_1(-\theta_1) = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.1.4)$$

où la troisième génération se découple. Il y a alors mélange seulement entre les deux premières générations.

2.2.2 Paramétrisation standard

Dans la littérature, on appelle paramétrisation standard, la paramétrisation adoptée par "The particle data group" [12]. Cette construction de la matrice de mélange a l'avantage de mieux paramétriser les données expérimentales. La phase est insérée via la matrice $R_3(\theta, \delta')$ donnée par:

$$\begin{pmatrix} c & 0 & se^{-i\delta'} \\ 0 & 1 & 0 \\ -se^{-i\delta'} & 0 & c \end{pmatrix} \quad (2.2.2.1)$$

Avec cette construction, V sera:

$$\begin{aligned} V &= R_2(\theta_{23})R_3(\theta_{13}, \delta')R_1(\theta_{12}) \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta'} \\ c_{23}s_{12} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta'} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}e^{i\delta'} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta'} & c_{12}s_{23} - c_{23}s_{12}s_{13}e^{i\delta'} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

Expérimentalement, les éléments diagonaux sont de l'ordre de 1. Quand tous les angles sont petits, la matrice de mélange s'écrit:

$$V \simeq \begin{pmatrix} 1^- & s_{12} & s_{13}e^{-i\delta'} \\ -s_{12} & 1^- & s_{23} \\ -s_{13}e^{i\delta} & -s_{23} & 1^- \end{pmatrix} \quad (2.2.2.3)$$

Dans ce cas limite, chaque élément est approximé par un terme unique, ce qui n'est pas le cas avec la paramétrisation KM.

Le symbole 1^- indique que ces éléments sont légèrement plus petits que 1 tel qu'exigé par l'unitarité.

2.2.3 Paramétrisation de Wolfenstein

Dans sa paramétrisation, Wolfenstein [13] écrit les V_{ij} comme une expansion autour d'un petit paramètre λ qui est égal au sinus de l'angle de Cabibbo ($\lambda = V_{us} = 0.22$).

En première étape, il ne garde que les termes d'ordre λ^2 ou plus grand.

Ayant $\lambda = V_{us}$, exprimons les autres éléments en fonction de λ .

Les mesures expérimentales donnent $V_{cb} \simeq 0.06$, donc de l'ordre de λ^2 .

$$V_{cb} = A\lambda^2 \text{ avec } A \simeq \frac{4}{5} \quad (2.2.3.1)$$

L'unitarité nous donne la relation suivante:

$$V_{ud}^2 + V_{us}^2 + V_{ub}^2 = 1 \quad (2.2.3.2)$$

Alors,

$$\begin{aligned} V_{ud}^2 &= 1 - V_{us}^2 - V_{ub}^2 \\ &\simeq 1 - \lambda^2; \end{aligned} \quad (2.2.3.3)$$

où l'on a négligé $|V_{ub}|^2$. Il vient:

$$\begin{aligned} V_{ud} &\simeq \sqrt{1 - \lambda^2} \\ &\simeq 1 - \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned} \quad (2.2.3.4)$$

V_{cd} est de l'ordre de V_{us} . On pose

$$V_{cd} = -V_{us} \simeq -\lambda \quad (2.2.3.5)$$

où le signe (-) découle de la liberté de choix de la phase. Encore à l'aide de l'unitarité:

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0 \quad (2.2.3.6)$$

Donc

$$\begin{aligned}
-\lambda(1 - \frac{\lambda^2}{2}) + \lambda V_{cs}^* &= 0 \\
V_{cs} &= 1 - \frac{\lambda^2}{2}
\end{aligned} \tag{2.2.3.7}$$

où l'on a considéré $V_{ub} \simeq 0$ à cause de sa petitesse relativement à λ^2 .
Expérimentalement, $V_{tb} \simeq 1$.

La matrice V_{KM} à l'ordre λ^2 s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & 0 \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ 0 & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.3.8}$$

En deuxième étape, on va considérer l'expansion des V_{ij} à l'ordre λ^3 .

V_{ub} est d'ordre λ^3 . Supposons qu'il s'écrit comme suit: $V_{ub} = A\lambda^3 B$, où B est complexe. Alors, pour déterminer V_{td} , utilisons:

$$V_{ud}V_{td}^* + V_{us}V_{ts}^* + V_{ub}V_{tb}^* = 0 \tag{2.2.3.9}$$

Il s'ensuit que:

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{\lambda^2}{2})V_{td}^* - \lambda^3 A + \lambda^3 AB &= 0 \\
V_{td}^* &= \frac{\lambda^3 A(1 - B)}{1 - \frac{\lambda^2}{2}} \\
V_{td} &\simeq \lambda^3 A(1 - B^*)(1 + \frac{\lambda^2}{2}) \\
V_{td} &\simeq \lambda^3 A - \lambda^3 AB^*
\end{aligned} \tag{2.2.3.10}$$

Si on pose $B = (\rho - i\eta)$; alors $V_{td} = \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta)$. La matrice V à l'ordre λ^3 s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.3.11}$$

Si on considère la conservation de CP, le calcul des éléments de V à l'ordre quatre n'est pas d'une grande utilité. Les termes à l'ordre 4 en λ sont trop

petits et leur contribution est négligeable. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de V_{td} , calculons $|\frac{V_{ub}}{V_{cb}}|$

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right| &= \left| \frac{\lambda^3 A(\rho - i\eta)}{\lambda^2 A} \right| \\ &= \sqrt{\lambda(\rho^2 + \eta^2)} \end{aligned} \quad (2.2.3.12)$$

Expérimentalement,

$$\left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right| < 0.2 \quad (2.2.3.13)$$

Alors,

$$\rho^2 + \eta^2 < \frac{0.04}{\sqrt{\lambda}} < 1 \quad (2.2.3.14)$$

Il vient donc que:

$$|V_{td}|^2 = \lambda^6 A^2 ((1 - \rho)^2 + \eta^2) \quad (2.2.3.15)$$

$$|V_{td}| < 2\lambda^3 A(1 - \rho) \quad (2.2.3.16)$$

$$< 2\lambda^3 A \quad (2.2.3.17)$$

Pour le système K^0 , la non-conservation de CP est reliée au produit $V_{td}V_{ts}$ [13]. Or d'après (2.2.3.11) et (2.2.3.17),

$$|V_{td}V_{ts}| < 2\lambda^5 A^2 \quad (2.2.3.18)$$

qui est de l'ordre de λ^5 . Pour rendre compte du phénomène de la non-conservation de CP, il est donc nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 5 dans le calcul des éléments de V . La brisure de CP est reliée à la phase de V_{KM} , donc seule la partie imaginaire des V_{ij} nécessite un développement à l'ordre λ^5 . Pour déterminer V_{ub} , on utilise la relation d'unitarité suivante:

$$V_{ud}V_{td}^* + V_{us}V_{ts}^* + V_{ub}V_{tb}^* = 0 \quad (2.2.3.19)$$

$V_{tb} \simeq 1$ donc:

$$V_{ud}V_{td}^* + V_{us}V_{ts}^* + V_{ub} = 0 \quad (2.2.3.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(V_{ub}) &= -\text{Im}(V_{ud}V_{td}^*) - \text{Im}(V_{us}V_{ts}^*) \\ &= -\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\text{Im}(V_{td}^*) - \lambda\text{Im}(V_{ts}^*) \\ &= -A\lambda^3\left(\eta + \frac{1}{2}\eta\lambda^2\right) \end{aligned} \quad (2.2.3.21)$$

Pour la détermination de V_{cs} , on utilise:

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0 \quad (2.2.3.22)$$

En multipliant par $V_{ud}^*V_{us}$, nous aurons:

$$|V_{ud}|^2|V_{us}|^2 + V_{ud}^*V_{us}V_{cd}V_{cs}^* + V_{ud}^*V_{us}V_{td}V_{ts}^* = 0 \quad (2.2.3.23)$$

Il en résulte

$$\text{Im}(V_{ud}^*V_{us}V_{cd}V_{cs}^* + V_{ud}^*V_{us}V_{td}V_{ts}^*) = 0 \quad (2.2.3.24)$$

$$\text{Im}(V_{ud}^*V_{us}V_{cd}V_{cs}^*) = -\text{Im}(V_{ud}^*V_{us}V_{td}V_{ts}^*) \quad (2.2.3.25)$$

$$-\lambda \text{Im}(V_{cs}) = A\lambda^2 \text{Im}(V_{td}^*)$$

$$\text{Im}(V_{cs}) = -A^2\lambda^4\eta \quad (2.2.3.26)$$

La détermination de $\text{Im}(V_{cb})$ est faite à partir de la relation:

$$V_{cd}V_{td}^* + V_{cs}V_{ts}^* + V_{cb} = 0 \quad (2.2.3.27)$$

Alors

$$\text{Im}(V_{cb}) = -\text{Im}(V_{cd}V_{td}^*) - \text{Im}(V_{cs}V_{ts}^*)$$

$$\text{Im}(V_{cb}) = \lambda(A\lambda^3\eta) + O(\lambda^5)$$

$$\text{Im}(V_{cb}) = A\lambda^4\eta \quad (2.2.3.28)$$

Ainsi la matrice V à l'ordre λ^5 permettant de rendre compte du phénomène de la non-conservation de CP est donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta + i\eta\frac{1}{2}\lambda^2) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} - i\eta A^2\lambda^4 & A\lambda^2(1 + i\eta\lambda^2) \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.3.29)$$

2.2.4 Paramétrisation de Hamzaoui

Cette paramétrisation appartient à la classe de paramétrisation des matrices de mélange en terme des observables physiques. C'est à partir du moment où Jarlskog [17] a élaboré la méthode des projecteurs permettant d'exprimer

directement les observables en fonctions des invariants des matrices de masses, sans être obligé de les diagonaliser, que ce nouveau type de paramétrisation a suscité beaucoup d'intérêt. Comme les angles et les phases dépendent de la convention choisie, il est désirable d'introduire des combinaisons d'angles et de phases qui seraient observables et donc indépendantes des conventions.

Hamzaoui [14] a montré que pour $n = 3$, la plus simple paramétrisation de la matrice de mélange est obtenue en ignorant les angles et les phases et en utilisant à la place, quatre modules indépendants de la matrice de mélange. Ceci est dû au fait que les modules sont observables alors que les angles et la phase ne le sont pas; on les déduit des observables.

Dans cette paramétrisation [14-15], le choix des quatre paramètres indépendants consiste à prendre les modules $|V_{us}|$, $|V_{cb}|$, $|V_{td}|$ et $\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}$.

Grâce à la liberté de rephaser les champs des quarks, on peut choisir librement les phases de cinq éléments quelconque de V à la condition suivante: pas plus de trois des cinq éléments n'appartiennent à une même sous-matrice 2×2 de V . Un choix convenable des phases sera de les prendre nulles. Le choix fait par A. Campa, C. Hamzaoui et V. Rahal [15] est d'avoir quatre éléments positifs $|V_{ud}|$, $|V_{us}|$, $|V_{td}|$, $|V_{cb}|$ et un élément négatif V_{cd} . Il vient:

$$V_{us} = |V_{us}| \quad (2.2.4.1)$$

$$V_{cb} = |V_{cb}| \quad (2.2.4.2)$$

$$V_{td} = |V_{td}| \quad (2.2.4.3)$$

$$V_{cd} = -|V_{cd}| \quad (2.2.4.4)$$

$$V_{ub} = \rho |V_{cb}| e^{i\delta} \quad (2.2.4.5)$$

La matrice V_{ij} est une matrice unitaire. D'où

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1 \quad (2.2.4.6)$$

$$|V_{ud}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{td}|^2 = 1 \quad (2.2.4.7)$$

et donc:

$$|V_{ud}| = \sqrt{1 - |V_{us}|^2 - \rho^2 |V_{cb}|^2} \quad (2.2.4.8)$$

$$|V_{cd}| = \sqrt{|V_{us}|^2 + \rho^2 |V_{cb}|^2 - |V_{td}|^2} \quad (2.2.4.9)$$

On a choisi V_{cd} négatif, les autres sont positifs. Ainsi

$$V_{ud} = \sqrt{1 - |V_{us}|^2 - \rho^2 |V_{cb}|^2} \quad (2.2.4.10)$$

et

$$V_{cd} = -\sqrt{|V_{us}|^2 + \rho^2 |V_{cb}|^2 - |V_{td}|^2} \quad (2.2.4.11)$$

De l'orthogonalité de V_{KM} , on a

$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0 \quad (2.2.4.12)$$

$$V_{tb}V_{td}^* + V_{cb}V_{cd}^* + V_{ub}V_{ud}^* = 0 \quad (2.2.4.13)$$

$$V_{us}V_{ud}^* + V_{cs}V_{cd}^* + V_{ts}V_{td}^* = 0 \quad (2.2.4.14)$$

ce qui donne

$$V_{cs}^* = -\frac{V_{ud}V_{cd}^*}{V_{us}} - \frac{V_{ub}V_{cb}^*}{V_{us}} \quad (2.2.4.15)$$

$$V_{tb} = -\frac{V_{cb}V_{cd}^*}{V_{td}^*} - \frac{V_{ub}V_{ud}^*}{V_{td}^*} \quad (2.2.4.16)$$

$$V_{ts} = -\frac{V_{cs}V_{cd}^*}{V_{td}^*} - \frac{V_{us}V_{ud}^*}{V_{td}^*} \quad (2.2.4.17)$$

Avec les conventions adoptées au départ (2.2.4.1), on trouve

$$V_{cs} = \frac{|V_{ud}||V_{cd}|}{|V_{us}|} - \frac{\rho|V_{cb}|^2}{|V_{us}|}e^{-i\delta} \quad (2.2.4.18)$$

$$V_{tb} = \frac{|V_{cb}||V_{cd}|}{|V_{td}|} - \frac{\rho|V_{cb}||V_{ud}|}{|V_{td}|}e^{i\delta} \quad (2.2.4.19)$$

$$\begin{aligned} V_{ts} &= \frac{|V_{cd}|}{|V_{td}|} \left[\frac{|V_{ud}||V_{cd}|}{|V_{us}|} - \frac{\rho|V_{cb}|^2}{|V_{us}|}e^{-i\delta} \right] - \frac{|V_{us}||V_{ud}|}{|V_{td}|} \\ &= \frac{|V_{ud}|(\rho^2|V_{cb}|^2 - |V_{td}|^2)}{|V_{us}||V_{td}|} - \frac{\rho|V_{cb}|^2|V_{cd}|}{|V_{us}||V_{td}|}e^{-i\delta} \end{aligned} \quad (2.2.4.20)$$

La phase est donnée par:

$$\begin{aligned} \cos(\delta) &= \frac{-1}{2|V_{ud}||V_{cd}|\rho|V_{cb}|^2} \left[|V_{td}|^2 - \rho^2|V_{cb}|^2 + \rho^2|V_{us}|^2|V_{cb}|^2 - \rho^2|V_{cb}|^2|V_{td}|^2 \right. \\ &\quad \left. - |V_{us}|^2|V_{cb}|^2 - \rho^2|V_{cb}|^4 + \rho^4|V_{cb}|^4 \right] \end{aligned} \quad (2.2.4.21)$$

2.3 Rephasage, invariance et représentation géométrique

Pour qu'une expression quelconque représente une quantité physique observable, il faut qu'elle soit invariante sous une transformation de phase des champs des fermions.

$$q_\alpha \rightarrow e^{i\theta_1} q_\alpha \quad (2.3.1)$$

$$q_i \rightarrow e^{i\theta_2} q_i \quad (2.3.2)$$

$$q_\beta \rightarrow e^{i\theta_3} q_\beta \quad (2.3.3)$$

$$\overline{q_i} V_{i\alpha} q_\alpha \rightarrow \overline{q_i} V_{i\alpha} q_\alpha e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (2.3.4)$$

Les invariants minimum contenant toutes les informations relatives à la phase sont les quantités suivantes:

$$T_{i\alpha j\beta} = V_{i\alpha} V_{j\beta} V_{i\beta}^* V_{j\alpha}^* \quad (2.3.5)$$

La mesure de la brisure CP est définie comme la partie imaginaire de $T_{i\alpha j\beta}$.

$$Im(T_{i\alpha j\beta}) = J \sum_{k,\gamma} \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.3.6)$$

Considérons maintenant les relations unitaires suivantes:

$$V_{td} V_{tb}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{ud} V_{ub}^* = 0 \quad (2.3.7)$$

Puisqu'on a affaire à des nombres complexes, cette relation peut être interprétée par un triangle dans le plan complexe.

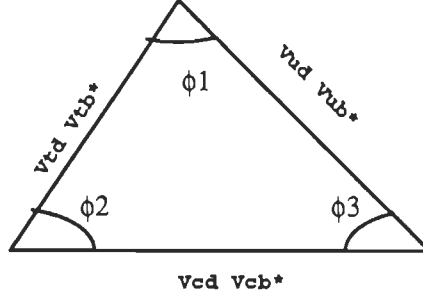


Figure 2.1 Représentation géométrique de $V_{td}V_{tb}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{ud}V_{ub}^* = 0$

Expérimentalement, les éléments diagonaux sont presque unitaires. Si on considère maintenant $|V_{tb}| = |V_{ud}| \simeq 1$, la relation (2.3.7) devient:

$$V_{td} + V_{cd}V_{cb}^* + V_{ub}^* = 0 \quad (2.3.8)$$

qui est représentée dans le plan complexe par le triangle suivant:

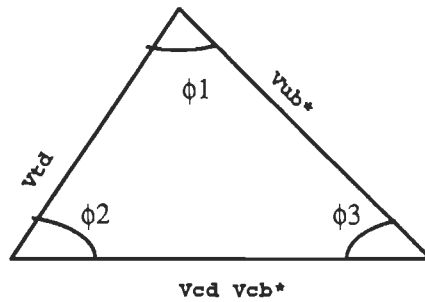


Figure 2.2 Représentation géométrique de $V_{td} + V_{cd}V_{cb}^* + V_{ub}^* = 0$

Pour montrer la relation géométrique entre J et l'aire du triangle, multiplions (2.3.7) par $V_{cd}^* V_{cb}$; on obtient:

$$V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^* + V_{td}V_{cb}V_{tb}^*V_{cd}^* + |V_{cd}|^2|V_{cb}|^2 = 0 \quad (2.3.9)$$

qui est représentée par la figure 2.3

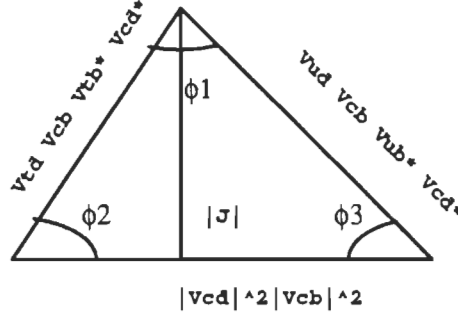


Figure 2.3 Représentation géométrique de (2.3.9)

N.B: $|V_{cd}|^2 |V_{cb}|^2 \rightarrow |V_{cd}|^2 |V_{cb}|^2$

Il résulte de cette interprétation géométrique une caractéristique importante reliant les dimensions du triangle à la brisure de CP. La mesure de la brisure de la symétrie CP(J) n'est que la hauteur du triangle.

Pour des raisons d'invariance sous un rephasage des champs des quarks, la mesure de la brisure de CP est définie comme étant la partie imaginaire de $T_{i\alpha j\beta}$. De la figure (2.3), la hauteur h du triangle est donnée par:

$$h = |V_{ud} V_{cb} V_{ub}^* V_{cd}^*| \sin(\phi_1) = |J|. \quad (2.3.10)$$

La hauteur du triangle est donc exactement le module de J , la mesure de la brisure de la symétrie CP. La surface du triangle est simplement donnée par: $\frac{1}{2} |J| |V_{cd}|^2 |V_{cb}|^2$. Pour avoir une brisure de CP, il faut que la surface du triangle soit non nulle.

Une autre importante propriété en relation avec l'asymétrie de CP dans la désintégration B aux états finaux auto-conjugués par rapport à CP est [19]:

$$\begin{aligned} |J| &= |V_{ud}| |V_{td}| |V_{tb}| |V_{ub}| |\sin(\phi_1)| \\ &= |V_{td}| |V_{cb}| |V_{tb}| |V_{cd}| |\sin(\phi_2)| \\ &= |V_{ud}| |V_{cb}| |V_{ub}| |V_{cd}| |\sin(\phi_3)| \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

qui résulte de la géométrie triangulaire. De plus, la loi des sinus nous donne une relation entre ϕ_1 , ϕ_2 , et ϕ_3 :

$$\frac{|\sin(\phi_2)|}{|\sin(\phi_1)|} = \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \frac{|V_{ud}|}{|V_{cd}|} \quad \frac{|\sin(\phi_3)|}{|\sin(\phi_1)|} = \frac{|V_{tb}|}{|V_{cb}|} \frac{|V_{td}|}{|V_{cd}|} \quad \frac{|\sin(\phi_3)|}{|\sin(\phi_2)|} = \frac{|V_{tb}|}{|V_{ub}|} \frac{|V_{td}|}{|V_{ud}|} \quad (2.3.12)$$

Toute information sur les angles du triangle est cruciale puisque l'amplitude de leur sinus nous donne de l'information sur l'asymétrie de la brisure CP dans la désintégration des mésons K et B. De plus, les contraintes sur ces angles sont un test de la relation angulaire du triangle:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi \quad (2.3.13)$$

qui n'est rien d'autre que la représentation géométrique de la condition d'unitarité. En utilisant les valeurs récentes de $0.05 < \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} < 0.09$ [1] et en prenant $|V_{ud}| \simeq 1$ et $|V_{cd}| \simeq 0.22$ dans l'équation (2.3.12), on obtient:

$$0.22 < \frac{|\sin(\phi_2)|}{|\sin(\phi_1)|} < 0.41 \quad (2.3.14)$$

2.4 Technique des opérateurs de projection de saveur

Cette technique fut proposée par Greenberg [16] et généralisée plus tard par Jarlskog [17]. Il s'agit d'utiliser les opérateurs de projection de saveur pour extraire des formes analytiques des éléments de la matrice de mélange en fonction des invariants des matrices tels que les traces et les déterminants. Ces invariants sont à leur tour exprimés en fonction des masses et des angles. Ainsi, on n'a pas à diagonaliser directement les matrices de masses.

En général, les observables des matrices de mélange sont des fonctions compliquées des paramètres des matrices de masse. La méthode des projecteurs nous permet de simplifier la tâche et d'en donner des expressions analytiques. Les sections qui suivent seront divisées ainsi: premièrement, on présente la méthode des opérateurs de projection de saveur pour des matrices hermitiques

et non hermitiques. Nous déduisons ensuite les expressions des observables $|V_{ij}|^2$ en fonction des invariants des matrices de masses. Le commutateur des matrices de masses des quarks est directement relié à la mesure de la brisure de symétrie CP. Deuxièmement on applique ce résultat à des ansatz spécifiques des matrices de masses. L'ansatz de Fritzsch sera étudié dans le chapitre III et celui de Fritzsch modifié fera le sujet du chapitre IV.

Supposons qu'il y a n familles de quarks et notons les matrices de masses des quarks M_u pour les quarks de type "up" et M_d pour le type "down". Dans le MS, on peut, sans perte de généralité, prendre M_u et M_d hermitiques. On prend au début le cas où les matrices sont hermitiques qu'on généralise plus tard au cas non hermitique.

2.4.1 Matrice de masse hermitique

Les matrices de masses $N \times N$ hermitiques sont diagonalisables par des rotations unitaires. Les valeurs propres des matrices de masses sont notées λ_u, λ_d . Les valeurs propres d'une matrice hermitique sont réelles mais ne sont pas nécessairement positives. Donc $\lambda_u^2 = m_u^2$, $\lambda_d^2 = m_d^2$, etc. où m_u, m_d sont les masses (positives) des quarks. On a:

$$UM_uU^\dagger = \text{diag}(\lambda_u, \lambda_c, \lambda_t, \dots) \quad (2.4.1.1.a)$$

$$U'M_dU'^\dagger = \text{diag}(\lambda_d, \lambda_s, \lambda_b, \dots) \quad (2.4.1.1.b)$$

Les opérateurs de projection pour les quarks de type up sont donnés par

$$P_\alpha(M_u) = \frac{v_\alpha(M_u)}{v} \quad (2.4.1.2)$$

où v est le déterminant de Vandermande donné par:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_3^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_3^{n-1} \end{vmatrix} \quad (2.4.1.3)$$

$$v = v(\lambda_u, \lambda_c, \lambda_t, \dots) = \prod_{\beta > \gamma} (\lambda_\beta - \lambda_\gamma) \quad (2.4.1.4)$$

Où

$$\lambda_1 = \lambda_u, \lambda_2 = \lambda_c, \lambda_3 = \lambda_t, \text{etc} \quad (2.4.1.5)$$

Pour $n = 3$

$$v = (\lambda_t - \lambda_c)(\lambda_t - \lambda_u)(\lambda_c - \lambda_u) \quad (2.4.1.6)$$

Le numérateur $v_\alpha(M_u)$ est obtenu à partir de v en remplaçant λ_α par la matrice de masse M_u et en multipliant tous les λ_β , $\beta \neq \alpha$ par la matrice unité. Pour $n = 3$,

$$v_u(M) = (\lambda_t - \lambda_c)(\lambda_t I - M_u)(\lambda_c I - M_u) \quad (2.4.1.7)$$

où I est la matrice identité.

La construction des opérateurs de projection pour les quarks de types “down” se fait de manière identique à celle des quarks de types “up”. S’il y a dégénérescence, cette construction nécessite une modification. Pour n’importe quelle paire de matrices M_u , M_d , en leur appliquant la même rotation X , où X est une matrice unitaire, les observables physiques restent invariantes sous cette rotation. Donc toutes les observables doivent être une fonction invariante des matrices de masses où une fonction invariante $f(M_u, M_d)$ est définie de façon à ce que:

$$f(M_u, M_d) = f(XM_u X^\dagger, XM_d X^\dagger) \quad (2.4.1.8)$$

Les observables de la matrice de mélange des quarks peuvent être exprimées en formes manifestement invariantes à l’aide des opérateurs de projection. Le carré des modules des éléments de matrice $V_{\alpha j}$ où $\alpha = u, c, t$ et $j = d, s, b$ est donné par:

$$|V_{\alpha j}|^2 = \text{Tr}[P_\alpha(M_u)P'_j(M_d)] \quad (2.4.1.9)$$

où $P_\alpha(M_u)$ a été défini auparavant et $P'_j(M_d)$ est son homologue pour le quark de type “down”.

Pour $n = 3$, le cas de trois familles: $[M_u, M_d] = iC$, CP est brisé si et seulement si $\text{Det}(C) \neq 0$.

$$Det(C) = -2vv'J \text{ où}$$

$$v = (\lambda_t - \lambda_c)(\lambda_t - \lambda_u)(\lambda_c - \lambda_u) \quad (2.4.1.10.a)$$

$$v' = (\lambda_b - \lambda_s)(\lambda_b - \lambda_d)(\lambda_s - \lambda_d) \quad (2.4.1.10.b)$$

et J est un invariant de la matrice de mélange des quarks.

$$J = Im(V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*) = J \sum_{\gamma, l} \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{j k l} \quad (2.4.1.11)$$

La somme dans cette dernière équation peut être ± 1 , tout dépend du choix des lignes et des colonnes. J est la mesure de la brisure de CP.

2.4.2 Matrice de masse non hermitique

Si M_u et M_d ne sont pas hermitiques, leurs “carrés” le seront: $S_u = M_u M_u^\dagger$, $S_d = M_d M_d^\dagger$, leurs valeurs propres ne sont pas négatives.

$$U S_u U^\dagger = diag(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4.2.1.a)$$

$$U' S_d U'^\dagger = diag(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad (2.4.2.1.b)$$

où:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (m_u^2, m_c^2, m_t^2, \dots) \quad (2.4.2.2.a)$$

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (m_d^2, m_s^2, m_b^2, \dots) \quad (2.4.2.2.b)$$

Les opérateurs de projection sont donnés par:

$$P_\alpha(s_u) = \frac{v_\alpha(s_u)}{v}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.2.3.a)$$

$$P'_j(s_d) = \frac{v'_j(s_d)}{v'}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.2.3.b)$$

où

$$v = v(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\beta > \gamma} (x_\beta - x_\gamma) \quad (2.4.2.4)$$

et $v_\alpha(s_u)$ est obtenu à partir de v en remplaçant $x_\alpha \rightarrow S_u$ et $x_\beta \rightarrow x_\beta I, \beta \neq \alpha$. Alors la construction suit exactement les mêmes étapes que dans le cas des matrices hermitiques. De plus les fonctions invariantes de S_u et S_d peuvent être définies en remplaçant (M_u, M_d) par (S_u, S_d) . Le commutateur fait appel à S_u et S_d à la place de M_u et M_d et son déterminant a la forme: $Det(C) = -2v v' J$. Les termes v et v' font appel au carré des masses. J est exactement le même qu'auparavant.

Ayant introduit la méthode de projection, nous sommes en mesure maintenant de l'appliquer à la matrice V_{KM} , pour exprimer ses 9 éléments en fonctions des invariants suivants:

$$\begin{aligned} & Tr(M_u), Tr(M_d), Tr(M_u)^2, Tr(M_d)^2, Tr(M_u M_d), Tr(M_u^2 M_d), \\ & Tr(M_u M_d^2) \text{ et } Tr(M_u^2 M_d^2) \end{aligned} \quad (2.4.2.5)$$

Dans ce but, calculons $P_\alpha(M_u)$, pour $\alpha = u$, cett t et $P'_j(M_d)$, pour $j = d$, s et b .

$$v = (m_t - m_c)(m_t - m_u)(m_c - m_u) \quad (2.4.2.6.a)$$

$$v_u(M_u) = (m_t - m_c)(m_t I - M_u)(m_c I - M_u) \quad (2.4.2.6.b)$$

$$v_c(M_u) = (m_t I - M_u)(m_t - m_u)(M_u - m_u I) \quad (2.4.2.6.c)$$

$$v_t(M_u) = (M_u - m_c I)(M_u - m_u I)(m_c - m_u) \quad (2.4.2.6.d)$$

$$v' = (m_b - m_s)(m_b - m_d)(m_s - m_d) \quad (2.4.2.7.a)$$

$$v'_d(M_d) = (m_b - m_s)(m_b I - M_d)(m_s I - M_d) \quad (2.4.2.7.b)$$

$$v'_s(M_d) = (m_b I - M_d)(m_b - m_d)(M_d - m_d I) \quad (2.4.2.7.c)$$

$$v'_b(M_d) = (M_d - m_s I)(M_d - m_d I)(m_s - m_d) \quad (2.4.2.7.d)$$

ce qui donne:

$$P_u(M_u) = \frac{(m_t I - M_u)(m_c I - M_u)}{(m_t - m_u)(m_c - m_u)} \quad (2.4.2.8.a)$$

$$P_d(M_d) = \frac{(m_b I - M_d)(m_s I - M_d)}{(m_b - m_d)(m_s - m_d)} \quad (2.4.2.8.b)$$

$$P_c(M_u) = \frac{(m_t I - M_u)(M_u - m_u I)}{(m_t - m_c)(m_c - m_u)} \quad (2.4.2.8.c)$$

$$P_s(M_d) = \frac{(m_b I - M_d)(M_d - m_d I)}{(m_b - m_s)(m_s - m_d)} \quad (2.4.2.8.d)$$

$$P_t(M_u) = \frac{(M_u - m_c I)(M_u - m_u I)}{(m_t - m_c)(m_t - m_u)} \quad (2.4.2.8.e)$$

$$P_b(M_d) = \frac{(M_d - m_s I)(M_d - m_d I)}{(m_b - m_s)(m_b - m_d)} \quad (2.4.2.8.f)$$

La relation (2.4.1.9), nous permet d'écrire les équations que vérifient les 9 éléments de la matrice V_{KM} . Elles sont données par:

$$|V_{ud}|^2 = \text{Tr}[P_u(M_u)P_d(M_d)] \quad (2.4.2.9.a)$$

$$|V_{us}|^2 = \text{Tr}[P_u(M_u)P_s(M_d)] \quad (2.4.2.9.b)$$

$$|V_{ub}|^2 = \text{Tr}[P_u(M_u)P_b(M_d)] \quad (2.4.2.9.c)$$

$$|V_{cd}|^2 = \text{Tr}[P_c(M_u)P_d(M_d)] \quad (2.4.2.9.d)$$

$$|V_{cs}|^2 = \text{Tr}[P_c(M_u)P_s(M_d)] \quad (2.4.2.9.e)$$

$$|V_{cb}|^2 = \text{Tr}[P_c(M_u)P_b(M_d)] \quad (2.4.2.9.f)$$

$$|V_{td}|^2 = \text{Tr}[P_t(M_u)P_d(M_d)] \quad (2.4.2.9.g)$$

$$|V_{ts}|^2 = \text{Tr}[P_t(M_u)P_s(M_d)] \quad (2.4.2.9.h)$$

$$|V_{tb}|^2 = \text{Tr}[P_t(M_u)P_b(M_d)] \quad (2.4.2.9.i)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & (m_t - m_u)(m_c - m_u)(m_b - m_s)(m_d - m_s)|V_{us}|^2 = 3m_t m_c m_b m_d \\ & - m_t m_c (m_b + m_d) \text{Tr}(M_d) + m_t m_c \text{Tr}(M_d^2) + m_b m_d \text{Tr}(M_u^2) \\ & - m_b m_d (m_t + m_c) \text{Tr}(M_u) + (m_t + m_c)(m_b + m_d) \text{Tr}(M_u M_d) \\ & - (m_t + m_c) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (m_b + m_d) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\ & + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2) \end{aligned} \quad (2.4.2.10.a)$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_c)(m_u - m_c)(m_b - m_d)(m_s - m_d)|V_{cd}|^2 = 3m_tm_um_bm_s \\
& - m_tm_u(m_b + m_s)Tr(M_d) + m_tm_uTr(M_d^2) + m_bm_sTr(M_u^2) \\
& - m_bm_s(m_t + m_u)Tr(M_u) + (m_t + m_u)(m_b + m_s)Tr(M_uM_d) \\
& - (m_t + m_u)Tr(M_uM_d^2) - (m_b + m_s)Tr(M_u^2M_d) \\
& + Tr(M_u^2M_d^2) \tag{2.4.2.10.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_c)(m_u - m_c)(m_b - m_d)(m_b - m_s)|V_{cb}|^2 = 3m_tm_um_dm_s \\
& - m_tm_u(m_s + m_d)Tr(M_d) + m_tm_uTr(M_d^2) + m_sm_dTr(M_u^2) \\
& - m_sm_d(m_t + m_u)Tr(M_u) + (m_t + m_u)(m_s + m_d)Tr(M_uM_d) \\
& - (m_t + m_u)Tr(M_uM_d^2) - (m_s + m_d)Tr(M_u^2M_d) \\
& + Tr(M_u^2M_d^2) \tag{2.4.2.10.c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_u)(m_c - m_u)(m_b - m_d)(m_b - m_s)|V_{ub}|^2 = 3m_tm_cm_sm_d \\
& - m_tm_c(m_s + m_d)Tr(M_d) + m_tm_cTr(M_d^2) + m_sm_dTr(M_u^2) \\
& - m_sm_d(m_t + m_c)Tr(M_u) + (m_t + m_c)(m_s + m_d)Tr(M_uM_d) \\
& - (m_t + m_c)Tr(M_uM_d^2) - (m_s + m_d)Tr(M_u^2M_d) \\
& + Tr(M_u^2M_d^2) \tag{2.4.2.10.d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_u)(m_c - m_u)(m_b - m_d)(m_s - m_d)|V_{ud}|^2 = 3m_tm_cm_sm_b \\
& - m_tm_c(m_b + m_s)Tr(M_d) + m_tm_cTr(M_d^2) + m_sm_bTr(M_u^2) \\
& - m_bm_s(m_t + m_c)Tr(M_u) + (m_t + m_c)(m_s + m_b)Tr(M_uM_d) \\
& - (m_t + m_c)Tr(M_uM_d^2) - (m_s + m_b)Tr(M_u^2M_d) \\
& + Tr(M_u^2M_d^2) \tag{2.4.2.10.e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_c)(m_c - m_u)(m_b - m_s)(m_s - m_d)|V_{cs}|^2 = 3m_tm_um_bm_d \\
& - m_tm_u(m_b + m_d)Tr(M_d) + m_tm_uTr(M_d^2) + m_bm_dTr(M_u^2) \\
& - m_bm_d(m_t + m_u)Tr(M_u) + (m_t + m_u)(m_b + m_d)Tr(M_uM_d) \\
& - (m_t + m_u)Tr(M_uM_d^2) - (m_b + m_d)Tr(M_u^2M_d) \\
& + Tr(M_u^2M_d^2) \tag{2.4.2.10.f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_c)(m_t - m_u)(m_b - m_d)(m_s - m_d)|V_{td}|^2 = 3m_b m_c m_s m_u \\
& - m_u m_c (m_b + m_s) \text{Tr}(M_d) + m_u m_c \text{Tr}(M_d^2) + m_s m_b \text{Tr}(M_u^2) \\
& - m_b m_s (m_u + m_c) \text{Tr}(M_u) + (m_u + m_c)(m_b + m_s) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_u + m_c) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (m_s + m_b) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{2.4.2.10.g}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_u)(m_t - m_c)(m_b - m_s)(m_d - m_s)|V_{ts}|^2 = 3m_u m_c m_b m_d \\
& - m_u m_c (m_b + m_d) \text{Tr}(M_d) + m_u m_c \text{Tr}(M_d^2) + m_b m_d \text{Tr}(M_u^2) \\
& - m_b m_d (m_u + m_c) \text{Tr}(M_u) + (m_u + m_c)(m_b + m_d) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_u + m_c) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (m_b + m_d) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{2.4.2.10.h}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_u)(m_t - m_c)(m_b - m_d)(m_b - m_s)|V_{tb}|^2 = 3m_u m_c m_d m_s \\
& - m_u m_c (m_d + m_s) \text{Tr}(M_d) + m_u m_c \text{Tr}(M_d^2) + m_d m_s \text{Tr}(M_u^2) \\
& - m_d m_s (m_u + m_c) \text{Tr}(M_u) + (m_u + m_c)(m_d + m_s) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_u + m_c) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (m_d + m_s) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{2.4.2.10.i}$$

Nous avons exprimé les éléments de la matrice V_{KM} en termes des masses des quarks et d'invariants des matrices de masses. Nous pouvons maintenant travailler sur les matrices de masses et calculer les éléments de la matrice V_{KM} à partir de celles-ci. Nous pourrions ainsi extraire des relations entre les masses des quarks et les éléments de ces deux matrices.

CHAPITRE III

MODÈLE DE FRITZSCH

3.1 Introduction

On a vu dans le chapitre I comment le modèle standard fait appel à un grand nombre de paramètres arbitraires pour décrire les interactions électrofaibles. Ce qu'on constate à partir du lagrangien du M.S., est que les éléments des matrices de masses et de mélange ne sont pas prédits par le modèle à cause du fait que les constantes de couplage Higgs-fermion ne sont pas fixées. Ils sont par contre mis à la main. Le M.S. ne prédit pas non plus le nombre de générations. Il ne donne aucune explication pourquoi il y a trois générations. L'origine des masses et leur hiérarchie (ie $m_t \gg m_c \gg m_u$) restent mystérieuses aussi.

Face à ces questions, deux approches ont été envisagées. Soit que l'on construise un modèle décrivant correctement les forces et expliquant l'origine des masses, le nombre de générations et la hiérarchie dans le spectre de masse des quarks. Soit qu'on suggère un certain ansatz qui explique au moins la corrélation intime qui existe entre les masses des six quarks et leurs mélanges. C'est cette dernière approche qu'on va investiguer dans le présent mémoire.

3.2 Matrices de masses de Fritzsch

Dans la littérature plusieurs ansatz des matrices de masses [6] ont été suggérés. Parmi ces ansatz, le plus populaire et économique est celui de Fritzsch [6] qui sera étudié dans la section qui suit. Inspiré de la chromodynamique

quantique et du principe de l'interaction des voisins les plus proches, Fritzsche a suggéré la forme suivante des matrices de masse:

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x^* & 0 & b \\ 0 & b^* & a \end{pmatrix}; M_d = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y^* & 0 & f \\ 0 & f^* & d \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

où M_u et M_d sont des matrices de masse hermitiques. x, y, b et f sont des nombres complexes, nous les représentons comme suit:

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & |x|e^{i\delta_x} & 0 \\ |x|e^{-i\delta_x} & 0 & |b|e^{i\delta_b} \\ 0 & |b|e^{-i\delta_b} & a \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & |y|e^{i\delta_y} & 0 \\ |y|e^{-i\delta_y} & 0 & |f|e^{i\delta_f} \\ 0 & |f|e^{-i\delta_f} & d \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

On va étudier ce modèle en utilisant la méthode des projecteurs qu'on a développée dans le chapitre précédent. Une fois qu'on exprime les modules $|V_{ij}|^2$ en fonction des masses et des angles, on calcule la limite supérieure de m_t à partir des éléments les plus connus expérimentalement. En deuxième lieu, on procède à l'étude graphique.

3.3 Expression des éléments de V_{KM} en fonction des éléments de M_u et M_d

En adoptant l'approche de Jarlskog, on va exprimer les modules $|V_{ij}|$ en fonction des invariants des matrices de masses donnés par les équations (2.4.2.10). Ces derniers seront exprimés en fonction des six masses des quarks et des deux phases.

Les observables physiques restent invariantes si on applique à M_u et M_d la même matrice de rotation unitaire X . Ceci est dû au fait que les champs des quarks sont définis à une phase près. Les fonctions invariantes des matrices de masses sont définies de manière à satisfaire la relation:

$$f(M_u, M_d) = f(XM_uX^\dagger, XM_dX^\dagger) \quad (3.3.1)$$

Avec un rephasage approprié des champs des quarks, y et f peuvent être choisies réelles positives. On applique la même rotation aux deux matrices, la physique ne change pas sous cette rotation. Sans faire aucune approximation, les calculs sont énormes et longs. Avec la méthode des projecteurs, la tâche se simplifie énormément. On peut déterminer x , b , a , $|y|$, $|f|$ et d en fonction des valeurs propres de M_u et M_d . Les valeurs propres de M_u sont $(\lambda_u, \lambda_c, \lambda_t)$ et celles de M_d sont $(\lambda_d, \lambda_s, \lambda_b)$. Les λ_i sont réelles mais ne sont pas nécessairement positives. λ_u peut être m_u ou $-m_u$ où m_u est la masse physique du quark “up”. On a:

$$Tr(M_u) = \lambda_t + \lambda_c + \lambda_u = a \quad (3.3.2)$$

$$Tr(M_u^2) = \lambda_t^2 + \lambda_c^2 + \lambda_u^2 = a^2 + 2(b^2 + |x|^2) \quad (3.3.3)$$

$$Tr(M_d^2) = \lambda_b^2 + \lambda_s^2 + \lambda_d^2 = d^2 + 2(|f|^2 + |y|^2) \quad (3.3.3)$$

$$Det(M_u) = \lambda_u \lambda_c \lambda_t = -a|x|^2 \quad (3.3.4)$$

$$Det(M_d) = \lambda_d \lambda_s \lambda_b = -d|y|^2 \quad (3.3.5)$$

Sans perte de généralité, on peut choisir a et d positifs. En isolant x et b , on obtient

$$|x|^2 = -\frac{\lambda_t \lambda_c \lambda_u}{\lambda_u + \lambda_c + \lambda_t} \quad (3.3.6)$$

$$b^2 = -\frac{(\lambda_t + \lambda_c)(\lambda_t + \lambda_u)(\lambda_c + \lambda_u)}{\lambda_t + \lambda_c + \lambda_u} \quad (3.3.7)$$

$$a|x|^2 = -\lambda_u \lambda_c \lambda_t \quad (3.3.8)$$

Nous cherchons une solution avec une structure hiérarchique $|\lambda_t| \gg |\lambda_c| \gg |\lambda_u|$. On voit à partir de (3.3.2) que $\lambda_t = m_t$ puisque a est positive. De (3.3.7) $\Rightarrow \lambda_c < 0$. c.a.d $\lambda_c = -m_c$ et finalement (3.3.8) $\Rightarrow \lambda_u = m_u$. D'où:

$$\begin{aligned} a &= m_t - m_c + m_u \\ |b| &= \left[\frac{(m_t - m_c)(m_t + m_u)(m_c - m_u)}{a} \right]^{\frac{1}{2}} \\ |x| &= \left[\frac{m_t m_c m_u}{a} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

En remplaçant $(m_u, m_c, m_t) \rightarrow (m_d, m_s, m_b)$, on trouve des relations similaires pour d , f et y .

$$\begin{aligned} d &= m_b - m_s + m_d \\ |f| &= \left[\frac{(m_b - m_s)(m_b + m_d)(m_s - m_d)}{d} \right]^{\frac{1}{2}} \\ |y| &= \left[\frac{m_b m_s m_d}{d} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

On doit maintenant exprimer les quatre observables indépendantes en fonction des invariants définis plus haut (2.4.2.5). Dans le cas de Fritzsch, ces invariants s'écrivent:

$$\begin{aligned} Tr(M_u M_d) &= ad + 2|b||f| \cos \delta_b + 2|x||y| \cos \delta_x \\ Tr(M_u^2 M_d) &= d(a^2 + |b|^2) + 2a|b||f| \cos \delta_b \\ Tr(M_u M_d^2) &= a(d^2 + |f|^2) + 2d|b||f| \cos \delta_b \\ Tr(M_u^2 M_d^2) &= (a^2 + |b|^2)(d^2 + |f|^2) + (|x|^2 + |b|^2)(y^2 + |f|^2) + |x|^2 |y|^2 \\ &\quad + 2ad|b||f| \cos \delta_b + 2|x||b||y||f| \cos(\delta_x + \delta_b) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

En substituant ces expressions dans les équations des observables, les modules des éléments de la matrice de mélange seront exprimés en fonction des six masses des quarks et des deux angles δ_x et δ_b .

Les observables sont données par (2.4.2.10):

$$|V_{\alpha j}|^2 = Tr[P_{\alpha}(M_u)P'_j(M_d)] \quad (3.3.12)$$

L'équation précédente donne les 9 $|V_{\alpha j}|$ en fonction des six masses et des deux angles δ_x et δ_b . Par unitarité, seulement quatre parmi les 9 $|V_{\alpha j}|$ sont indépendants. En remplaçant dans les équations des traces x , y , b , f , a et d par leurs valeurs respectives, on obtient les expressions des modules $|V_{ij}|^2$ de l'ansatz de Fritzsch en fonction des six masses et des deux phases.

3.4 Approximation des éléments V_{ij} de la matrice de mélange

L'expression exacte des éléments de la matrice de mélange, bien que garantie par la substitution mentionnée plus haut, donne des formules monstres difficiles à interpréter. Cependant, vu la hiérarchie que manifeste le spectre de masse des quarks, on peut simplifier énormément les $|V_{ij}|$ avec les approximations suivantes:

$$\begin{aligned}
|x|^2 &\simeq m_u m_c \\
|y|^2 &\simeq m_d m_s \\
|b|^2 &\simeq m_t (m_c - m_u) \\
|f|^2 &\simeq m_b (m_s - m_d) \\
tr M_u^2 &= m_t^2 + m_c^2 + m_u^2 \\
tr M_d^2 &= m_b^2 + m_s^2 + m_d^2 \\
tr M_u &= m_t - m_c + m_u \\
tr M_d &= m_b - m_s + m_d
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

On a ainsi:

$$\begin{aligned}
tr(M_u M_d) &= tr M_u tr M_d + 2|x||y| \cos \delta_x + 2|b||f| \cos \delta_b \\
&\simeq (m_b - m_s + m_d) (m_t - m_c + m_u) \\
&\quad + 2 \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
&\quad + 2 \sqrt{m_c m_d m_s m_u} \cos(\delta_x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr(M_u^2 M_d) &= (|b|^2 + tr M_u^2) tr M_d + 2 tr M_u |b||f| \cos \delta_b \\
&\simeq m_b m_c^2 + m_c^2 m_d - m_c^2 m_s - m_b m_c m_t - m_c m_d m_t \\
&\quad + m_c m_s m_t + m_b m_t^2 + m_d m_t^2 - m_s m_t^2 - 2 m_b m_c m_u \\
&\quad - 2 m_c m_d m_u + 2 m_c m_s m_u + m_b m_t m_u + m_d m_t m_u - m_s m_t m_u \\
&\quad + m_b m_u^2 + m_d m_u^2 - m_s m_u^2 \\
&\quad + 2 \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} (m_t - m_c + m_u) \cos(\delta_b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr(M_u M_d^2) &= (|f|^2 + tr M_d^2) tr M_u + 2 tr M_d |b| |f| \cos \delta_b \\
&\simeq -m_b^2 m_c - m_b m_c m_d - m_c m_d^2 + m_b m_c m_s \\
&\quad + 2 m_c m_d m_s - m_c m_s^2 + m_b^2 m_t + m_b m_d m_t \\
&\quad + m_d^2 m_t - m_b m_s m_t - 2 m_d m_s m_t + m_s^2 m_t \\
&\quad + m_b^2 m_u + m_b m_d m_u + m_d^2 m_u - m_b m_s m_u - 2 m_d m_s m_u + m_s^2 m_u \\
&\quad + 2 (m_b - m_s + m_d) \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (-m_c + m_u)} \cos(\delta_b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr(M_u^2 M_d^2) &\simeq |x|^2 |y|^2 + (|f|^2 + tr M_d^2)(|b|^2 + tr M_u^2) \\
&\quad + (|b|^2 + |x|^2)(|f|^2 + |y|^2) + 2|b||f| tr M_u tr M_d \cos \delta_b \\
&\simeq m_b^2 m_c^2 + m_b m_c^2 m_d + m_c^2 m_d^2 - m_b m_c^2 m_s \\
&\quad - 2 m_c^2 m_d m_s + m_c^2 m_s^2 - m_b^2 m_c m_t - 2 m_b m_c m_d m_t \\
&\quad - m_c m_d^2 m_t + 2 m_b m_c m_s m_t + 3 m_c m_d m_s m_t - m_c m_s^2 m_t \\
&\quad + m_b^2 m_t^2 + m_b m_d m_t^2 + m_d^2 m_t^2 \\
&\quad - m_b m_s m_t^2 - 2 m_d m_s m_t^2 + m_s^2 m_t^2 - 2 m_b^2 m_c m_u - 3 m_b m_c m_d m_u \\
&\quad - 2 m_c m_d^2 m_u + 3 m_b m_c m_s m_u + 6 m_c m_d m_s m_u - 2 m_c m_s^2 m_u \\
&\quad + m_b^2 m_t m_u + 2 m_b m_d m_t m_u + m_d^2 m_t m_u - 2 m_b m_s m_t m_u \\
&\quad - 3 m_d m_s m_t m_u + m_s^2 m_t m_u + m_b^2 m_u^2 + m_b m_d m_u^2 \\
&\quad + m_d^2 m_u^2 - m_b m_s m_u^2 - 2 m_d m_s m_u^2 + m_s^2 m_u^2 \\
&\quad + 2 (m_b - m_s + m_d) \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} (m_t - m_c + m_u) \cos(\delta_b)
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

où l'on a négligé $|b||f||x||y| \cos(\delta_b + \delta_f)$ dans l'équation (3.4.2). Les éléments de la matrice de mélange se réduisent donc aux expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
&(m_b + m_s) (m_d + m_s) (-m_c - m_u) (m_t - m_u) |V_{us}|^2 = \\
&- m_b m_c m_d m_t - m_c m_d m_s m_t + m_b m_c m_d m_u + m_b m_c m_s m_u \\
&+ 3 m_c m_d m_s m_u - m_c m_s^2 m_u - m_b m_s m_t m_u - m_d m_s m_t m_u \\
&- m_d m_s m_u^2 + m_s^2 m_u^2 - 2 m_u m_s \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d)} (m_c - m_u) \cos(\delta_b)
\end{aligned}$$

$$+ 2(-m_b m_c - m_c m_d + m_b m_t + m_d m_t) \sqrt{m_c m_d m_s m_u} \cos(\delta_x) \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} & (m_b - m_d)(-m_d - m_s)(m_c + m_t)(m_c + m_u)|V_{cd}|^2 = \\ & m_c^2 m_d^2 - m_c^2 m_d m_s - m_b m_c m_d m_t + m_c m_d m_s m_t - m_b m_c m_d m_u \\ & - m_c m_d^2 m_u - m_b m_c m_s m_u + 3 m_c m_d m_s m_u - m_b m_s m_t m_u + m_d m_s m_t m_u \\ & - 2 m_c m_d \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\ & + \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (2 m_b m_t - 2 m_s m_t + 2 m_b m_u - 2 m_s m_u) \cos(\delta_x) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\begin{aligned} & (m_b - m_d)(m_b + m_s)(m_c + m_t)(m_c + m_u)|V_{cb}|^2 = \\ & m_b^2 m_c^2 - m_c^2 m_d m_s - m_b m_c m_d m_t + m_b m_c m_s m_t \\ & - m_b^2 m_c m_u - m_b m_c m_d m_u + m_b m_c m_s m_u + m_c m_d m_s m_u \\ & - 2 m_b m_c \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\ & + 2 \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (m_d m_t - m_s m_t + m_d m_u - m_s m_u) \cos(\delta_x) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} & (m_b - m_d)(-m_d - m_s)(-m_c - m_u)(m_t - m_u)|V_{ud}|^2 = \\ & m_b m_c m_s m_t - m_c m_d m_s m_t - m_b m_c m_d m_u - m_c m_d^2 m_u - m_b m_c m_s m_u \\ & + 3 m_c m_d m_s m_u + m_b m_d m_t m_u - m_d m_s m_t m_u + m_d^2 m_u^2 - m_d m_s m_u^2 \\ & + 2 m_d \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} m_u \cos(\delta_b) \\ & + 2(-m_b m_c + m_c m_s + m_b m_t - m_s m_t) \sqrt{m_c m_d m_s m_u} \cos(\delta_x) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned} & (-m_d - m_s)(m_b + m_s)(m_c + m_t)(-m_c - m_u)|V_{cs}|^2 = \\ & - m_c^2 m_d m_s + m_c^2 m_s^2 + m_b m_c m_s m_t + m_c m_d m_s m_t + m_b m_c m_d m_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_b m_c m_s m_u + 3 m_c m_d m_s m_u - m_c m_s^2 m_u + m_b m_d m_t m_u + m_d m_s m_t m_u \\
& + 2 m_c m_s \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
& + 2 \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (m_b m_t + m_d m_t + m_b m_u + m_d m_u) \cos(\delta_x)
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

$$\begin{aligned}
& (m_b - m_d)(-m_d - m_s)(m_c + m_t)(m_t - m_u)|V_{td}|^2 = \\
& - m_b m_c m_d m_t + m_c m_d m_s m_t + m_d^2 m_t^2 - m_d m_s m_t^2 - m_c m_d^2 m_u \\
& + m_c m_d m_s m_u + m_b m_d m_t m_u - m_d m_s m_t m_u \\
& + 2 m_d m_t \sqrt{m_b m_t (-m_d + m_s) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
& + 2 \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (-m_b m_c + m_c m_s + m_b m_u - m_s m_u) \cos(\delta_x)
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

$$\begin{aligned}
& (m_b + m_s)(m_d + m_s)(m_c + m_t)(m_t - m_u)|V_{ts}|^2 = \\
& m_b m_c m_s m_t + m_c m_d m_s m_t - m_d m_s m_t^2 + m_s^2 m_t^2 + m_c m_d m_s m_u \\
& - m_c m_s^2 m_u - m_b m_s m_t m_u - m_d m_s m_t m_u \\
& - 2 m_s m_t \sqrt{m_b m_t (-m_d + m_s) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
& + 2 \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (-m_b m_c - m_c m_d + m_b m_u + m_d m_u) \cos(\delta_x)
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

$$\begin{aligned}
& (m_b - m_d)(m_b + m_s)(-m_c - m_u)(m_t - m_u)|V_{ub}|^2 = \\
& - m_b^2 m_c m_u - m_b m_c m_d m_u + m_b m_c m_s m_u + m_c m_d m_s m_u \\
& + m_b m_d m_t m_u - m_b m_s m_t m_u + m_b^2 m_u^2 - m_d m_s m_u^2 \\
& + 2 m_b m_u \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
& + 2 (-m_c m_d + m_c m_s + m_d m_t - m_s m_t) \sqrt{m_c m_d m_s m_u} \cos(\delta_x)
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$(m_b - m_d)(m_b + m_s)(m_c + m_t)(m_t - m_u)|V_{tb}|^2 =$$

$$\begin{aligned}
& -m_b m_c m_d m_t + m_b m_c m_s m_t + m_b^2 m_t^2 - m_d m_s m_t^2 \\
& -m_b^2 m_c m_u + m_c m_d m_s m_u + m_b m_d m_t m_u - m_b m_s m_t m_u \\
& + 2 m_b m_t \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
& + \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (-2 m_c m_d + 2 m_c m_s + 2 m_d m_u - 2 m_s m_u) \cos(\delta_x)
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

La partie gauche de l'équation (3.4.5), peut être approximée par

$$(m_b - m_d)(m_b + m_s)(m_c + m_t)(m_c + m_u)|V_{cb}|^2 \simeq m_t m_b^2 m_c |V_{cb}|^2$$

d'où

$$\begin{aligned}
|V_{cb}|^2 \simeq & \frac{1}{m_t m_b^2 m_c} \left(m_b^2 m_c^2 - m_b m_c m_d m_t + m_b m_c m_s m_t \right. \\
& - m_b^2 m_c m_u - 2 m_b m_c \sqrt{m_b m_t (m_s - m_d) (m_c - m_u)} \cos(\delta_b) \\
& - m_c^2 m_d m_s - m_b m_c m_d m_u + m_b m_c m_s m_u + m_c m_d m_s m_u \\
& \left. + \sqrt{m_c m_d m_s m_u} (2 m_d m_t - 2 m_s m_t + 2 m_d m_u - 2 m_s m_u) \cos(\delta_x) \right)
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

En ne gardant que les termes dominants, (i.e les cinq premiers termes), l'équation précédente permet d'aboutir à une majoration de la valeur de m_t donnée par:

$$m_t \leq \frac{m_c - m_u}{[|V_{cb}| - \sqrt{\frac{m_s - m_d}{m_b}}]^2} \tag{3.4.13}$$

Expérimentalement, $|V_{cb}| \geq 0.03$, ce qui contraint m_t à avoir une valeur plus petite ou égale à 100 GeV.

Or on sait que cette valeur ne correspond pas à celle de m_t . Ce qui nous oblige à remettre en cause le modèle de Fritzsche. Dans le chapitre suivant, on va présenter une extension de ce modèle. Dans ce qui suit, on va procéder à l'étude graphique des éléments de la matrice de mélange dans le modèle de Fritzsche.

3.5 Analyse graphique

D'après (2.1), le nombre de paramètres indépendants dans la matrice de mélange est quatre. Pour l'étude graphique, on a choisi comme éléments indépendants les modules

$$|V_{us}|, |V_{cd}|, |V_{cb}|, \text{ et } \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}.$$

En principe, n'importe quel ensemble de quatre éléments de V_{KM} fera l'affaire. On a choisi les éléments les mieux connus expérimentalement.

Il est à noter que dans l'étude graphique, les équations considérées sont les équations exactes et non les approximations.

L'étude consiste à représenter graphiquement les modules $|V_{ij}|$ en fonction des deux angles et de m_t qui sont les trois inconnues dans les équations (3.4.3) à (3.4.11).

Bien qu'on se propose d'étudier les quatre équations, il s'avère que l'élément qui permet de tester le modèle est $|V_{cb}|$. Les équations $|V_{us}|$ et $|V_{cd}|$ sont généralement satisfaites.

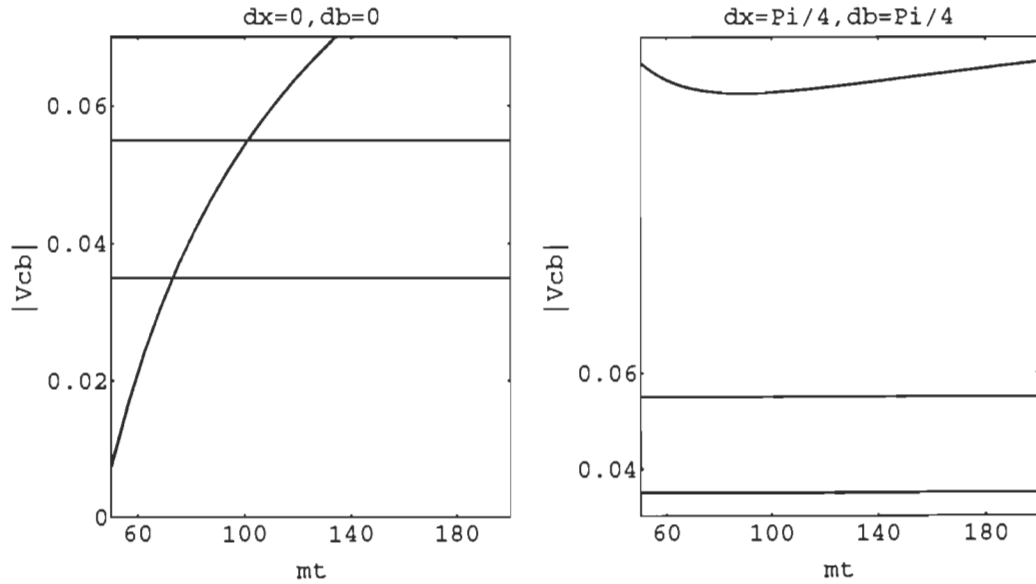


Figure 3.1. a) $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour $\delta_x = 0$ et $\delta_b = 0$
 b) $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{4}$ et $\delta_b = \frac{\pi}{4}$

N.B: $dx \rightarrow \delta_x$ et $db \rightarrow \delta_b$

Le graphique (a) représente $|V_{cb}|$ pour $\delta_x = \delta_b = 0$, et m_t va de 0 à 200 GeV. L'intervalle des m_t pour lequel $|V_{cb}| \in [0.035, 0.055]$ est $[80, 110]$ GeV. Ce qui ne correspond évidemment pas à la valeur expérimentale de m_t .

La figure (b) correspond à $\delta_x = \frac{\pi}{4}$, $\delta_b = \frac{\pi}{4}$. Pour ces valeurs des angles, $|V_{cb}| \geq 0.1$ quelle que soit la valeur de m_t . Ces angles sont donc exclus.

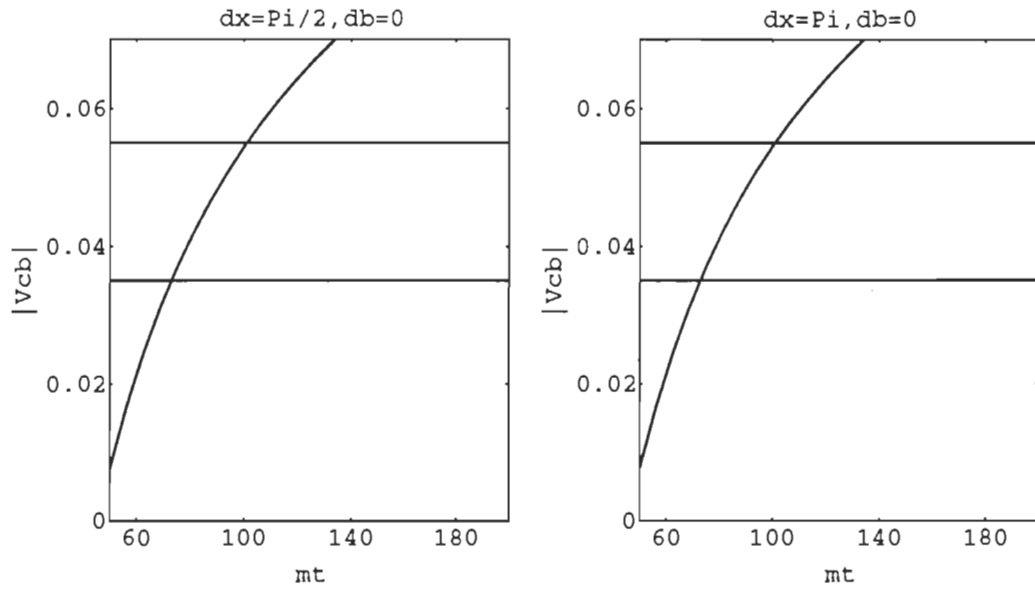


Figure 3.2 a) $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$
 b) $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour $\delta_x = \pi$ et $\delta_b = 0$
 N.B: $dx \rightarrow \delta_x$ et $db \rightarrow \delta_b$

Pour les graphes (a) et (b) de la figure 3.2, on obtient la même chose que pour le premier cas, cette fois, $\delta_x = \frac{\pi}{2}$, π et $\delta_b = 0$.

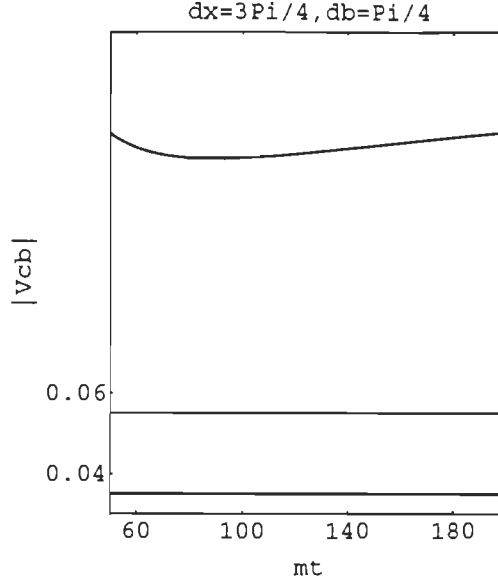


Figure 3.3 $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour $\delta_x = \frac{3\pi}{4}$ et $\delta_b = \frac{\pi}{4}$
 N.B: $dx \rightarrow \delta_x$ et $db \rightarrow \delta_b$

Dans la figure 3.3, on donne V_{cb} pour $\delta_x = \frac{3\pi}{4}$ et $\delta_b = \frac{\pi}{4}$. Pour ces valeurs des angles, $|V_{cb}|$ est toujours en dehors de l'intervalle permis expérimentalement.

Bien que ces graphiques ne couvrent pas tout l'intervalle des angles, ils constituent une sélection d'une vingtaine de graphiques où la conclusion est toujours la même: quel que soit le choix des angles, aucune combinaison d'angles ne satisfait simultanément les quatre équations.

Cette conclusion est plus directe à partir des figures 3.4 et 3.5, où on représente les surfaces de niveaux pour $|V_{cb}| = 0.035, 0.04, 0.045, 0.05$ et 0.055 . Pour ces contours, on ne fixe qu'un seul angle à la fois; m_t et le deuxième angle couvrent respectivement leurs intervalles permis.

Les graphiques (a), (b), (c) et (d) de la figure 3.4, représentent une coupe de $|V_{cb}|$ à $|V_{cb}| = 0.035, 0.04, 0.045, 0.05$ et 0.055 pour différents angles δ_x .

Les valeurs de m_t pour lesquelles $|V_{cb}|$ est dans le bon intervalle expérimental (i.e $|V_{cb}| \in [0.035, 0.055]$), sont dans l'intervalle $[20, 100]$ GeV.

Le graphique de la figure 3.5 représente les contours de $|V_{cb}|$ cette fois-ci avec δ_b fixe et δ_x qui variant de 0 à 2π . La conclusion est identique. Les m_t

obtenus comme solutions sont entre 20 et 100 GeV.

3.6 Conclusion

On a réussi à montrer par deux méthodes, graphique et analytique, que dans le cadre de l'ansatz de Fritzsche donné par (3.2.1), la masse m_t du quark top ne peut être supérieure à 100 GeV. Or on sait qu'elle est mesurée expérimentalement et que sa valeur est égale à $(174 \pm 10 \text{ GeV})$.

Il est donc évident que l'Anszatz de Fritzsche doit être modifié.

Dans le chapitre suivant, on va voir comment on peut remédier à ce problème. Un modèle modifié est suggéré et les calculs seront refaits avec ce nouvel ansatz.

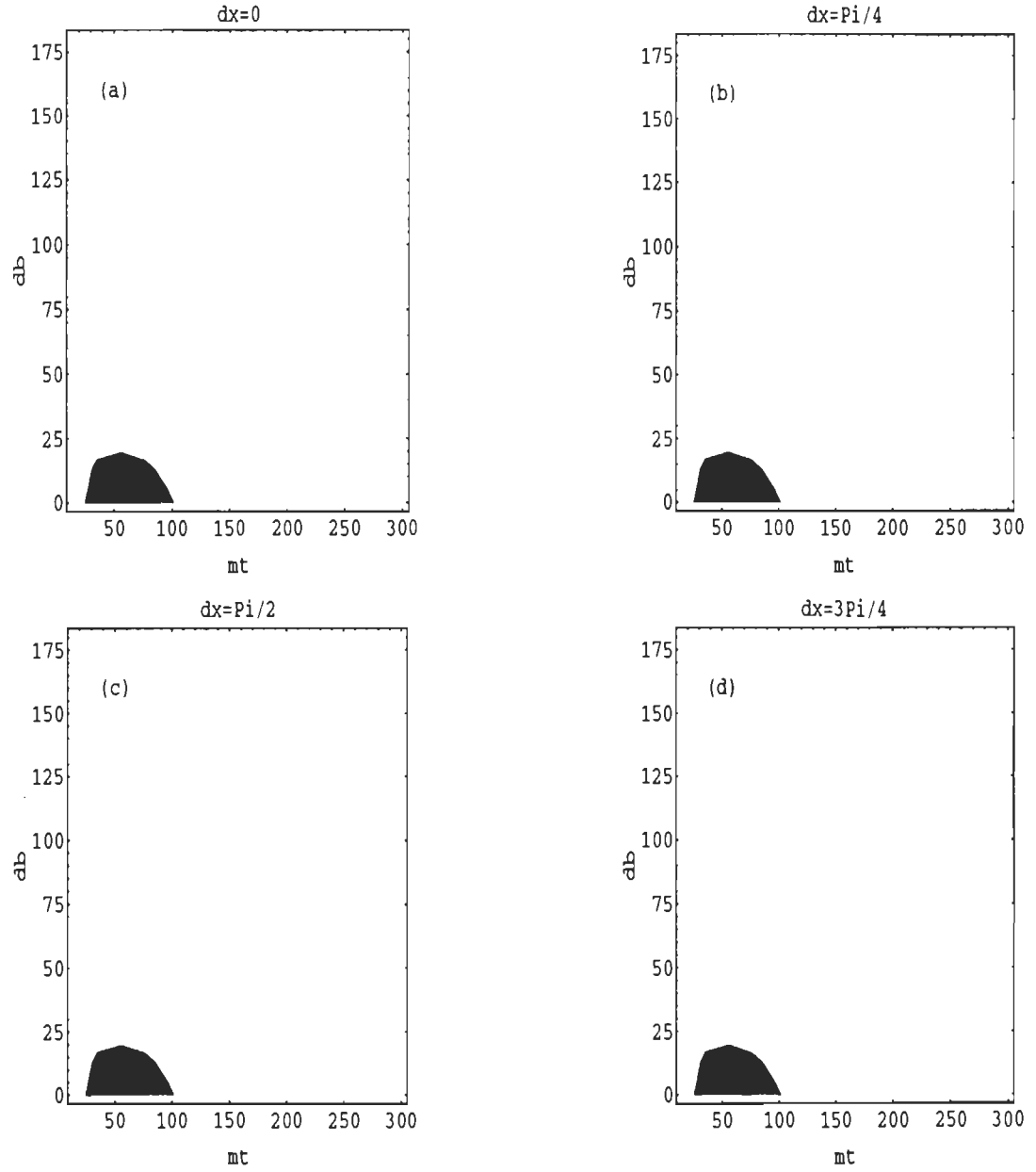


Figure 3.4. Contour de $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour

(a) $\delta_x = 0$

(b) $\delta_x = \frac{\pi}{4}$

(c) $\delta_x = \frac{\pi}{2}$

(d) $\delta_x = \frac{3\pi}{4}$

N.B: $dx \rightarrow \delta_x$ et $db \rightarrow \delta_b$

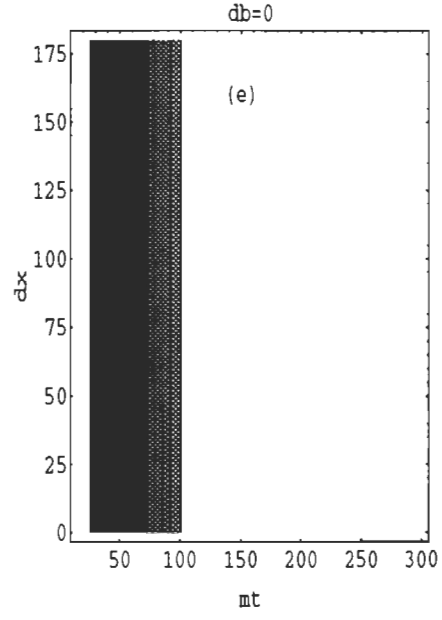


Figure 3.5. Contour de $|V_{cb}| = f(m_t)$ pour $\delta_b = 0$
 N.B: $dx \rightarrow \delta_x$ et $db \rightarrow \delta_b$

CHAPITRE IV

MODÈLE DE FRITZSCH MODIFIÉ

4.1 Introduction

On a démontré en détail dans le chapitre précédent que le modèle de Fritzsch prédit une valeur de la masse du top inférieure à 100 GeV. Récemment, la masse du top a été mesurée expérimentalement et elle vaut (174 ± 10) GeV. Le modèle de Fritzsch est donc remis en question. Devant cette situation, deux choix se présentent. Ou bien on abandonne le modèle de Fritzsch et on cherche carrément un autre modèle, ou bien on élabore une version modifiée de ce modèle qui pourrait accommoder la bonne valeur de la masse du top. Fritzsch, a fondé son ansatz sur des bases physiques très plausibles. Il s'est inspiré de la chromodynamique quantique et a utilisé l'approximation de l'interaction des voisins les plus proches. Pour préserver l'élégance de cet ansatz, plusieurs auteurs [18] ont opté pour sa modification.

La forme des matrices de masses proposée dans la littérature, et connue sous le nom de la forme de Fritzsch modifiée, consiste à poser $M_u^{22} \neq 0$ et $M_d^{22} \neq 0$ qui, pour le rappeler, étaient nuls dans l'ansatz de Fritzsch. Ainsi M_u et M_d seront données par:

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x^* & \alpha & b \\ 0 & b^* & a \end{pmatrix}; \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y^* & \beta & f \\ 0 & f^* & d \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier en détail cette forme des matrices de masses et on essaiera d'avoir une approximation des éléments de la matrice de mélange et de la valeur de la masse du top.

On procedera en plusieurs étapes. En premier lieu, on exprimera les invariants en fonction des six masses et des deux angles. En deuxième lieu, on cernera l'intervalle des valeurs permises des nouveaux paramètres α et β . Ensuite, on diagonalisera les matrices des masses M_u et M_d et déduire les expressions des éléments de la matrice de mélange. La dernière partie est consacrée à l'analyse graphique.

4.2 Expression des éléments de V_{KM} en fonction des éléments de M_u et M_d

On a montré dans le chapitre II, que le nombre d'éléments indépendents de la matrice V_{KM} est quatre. Pour notre étude on a choisi les quatre éléments sur lesquels on possède le plus d'information expérimentale. Ce sont $|V_{us}|$, $|V_{cd}|$, $|V_{cb}|$ et $\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}$.

Les équations que vérifient ces quatres éléments sont données par l'équation (2.4.2.10). Dans le chapitre III, on a adopté la convention de Fritzsch et on a choisi la valeur propre $\lambda_c < 0$. Explicitement, on a choisi $\lambda_c = -m_c$, où m_c est la masse physique du quark c.

Bien sûr, le choix est arbitraire; on aurait pu choisir m_t ou m_u , mais pour être consistant avec la littérature, il est préférable de faire ce choix. Avec cette convention, les matrices de masses diagonales deviennent:

$$UM_uU^\dagger = M_u^D = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & -m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

et similairement

$$VM_dV^\dagger = M_d^D = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

Les équations (2.4.2.10.a) à (2.4.2.10.d) s'écriront:

$$(m_t - m_u)(-m_c - m_u)(m_b + m_s)(m_d + m_s)|V_{us}|^2 = -3m_tm_cm_bm_d$$

$$\begin{aligned}
& + m_t m_c (m_b + m_d) \text{Tr}(M_d) - m_t m_c \text{Tr}(M_d^2) + m_b m_d \text{Tr}(M_u^2) \\
& - m_b m_d (m_t - m_c) \text{Tr}(M_u) + (m_t - m_c)(m_b + m_d) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_t - m_c) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (m_b + m_d) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t + m_c)(m_u + m_c)(m_b - m_d)(-m_s - m_d)|V_{cd}|^2 = -3m_t m_u m_b m_s \\
& - m_t m_u (m_b - m_s) \text{Tr}(M_d) + m_t m_u \text{Tr}(M_d^2) - m_b m_s \text{Tr}(M_u^2) \\
& + m_b m_s (m_t + m_u) \text{Tr}(M_u) + (m_t + m_u)(m_b - m_s) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_t + m_u) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (m_b - m_s) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t + m_c)(m_u + m_c)(m_b - m_d)(m_b + m_s)|V_{cb}|^2 = -3m_t m_u m_d m_s \\
& - m_t m_u (-m_s + m_d) \text{Tr}(M_d) + m_t m_u \text{Tr}(M_d^2) - m_s m_d \text{Tr}(M_u^2) \\
& + m_s m_d (m_t + m_u) \text{Tr}(M_u) + (m_t + m_u)(-m_s + m_d) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_t + m_u) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (-m_s + m_d) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\begin{aligned}
& (m_t - m_u)(-m_c - m_u)(m_b - m_d)(m_b + m_s)|V_{ub}|^2 = +3m_t m_c m_s m_d \\
& + m_t m_c (-m_s + m_d) \text{Tr}(M_d) - m_t m_c \text{Tr}(M_d^2) - m_s m_d \text{Tr}(M_u^2) \\
& + m_s m_d (m_t - m_c) \text{Tr}(M_u) + (m_t - m_c)(-m_s + m_d) \text{Tr}(M_u M_d) \\
& - (m_t - m_c) \text{Tr}(M_u M_d^2) - (-m_s + m_d) \text{Tr}(M_u^2 M_d) \\
& + \text{Tr}(M_u^2 M_d^2)
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Les traces $\text{Tr}(M_u)$, $\text{Tr}(M_d)$, $\text{Tr}(M_u^2)$, $\text{Tr}(M_d^2)$, $\text{Tr}(M_u M_d)$, $\text{Tr}(M_u^2 M_d)$, $\text{Tr}(M_u M_d^2)$, et $\text{Tr}(M_u^2 M_d^2)$ sont des invariants par rapport au changement de base dans laquelle sont exprimées les matrices M_u et M_d . Il s'agit de les

exprimer en fonction des éléments des matrices M_u^D et M_d^D .

$$M_u^2 = \begin{pmatrix} |x|^2 & \alpha x & bx \\ \alpha x^* & |x|^2 + \alpha^2 + |b|^2 & (\alpha + a)b \\ b^* x^* & (\alpha + a)b^* & |b|^2 + a^2 \end{pmatrix}; \quad (4.2.7)$$

$$M_d^2 = \begin{pmatrix} |y|^2 & \beta y & fy \\ \beta y^* & |y|^2 + \beta^2 + |f|^2 & (\beta + d)f \\ f^* y^* & (\beta + d)f^* & |f|^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} Tr(M_u M_d) &= Tr(M_u)Tr(M_d) + 2\alpha\beta - \alpha Tr(M_d) \\ &\quad - \beta Tr(M_u) + 2Re(xy^* + bf^*) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} Tr(M_u^2 M_d) &= \beta[|x|^2 - Tr^2(M_u) + 2\alpha Tr(M_u)] + Tr(M_d)(|b|^2 + a^2) + \\ &\quad 2\alpha Re(xy^*) + 2Tr(M_u)Re(bf^*) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} Tr(M_u M_d^2) &= \alpha[|y|^2 - Tr^2(M_d) + 2\beta Tr(M_d)] + Tr M_u(|f|^2 + d^2) + \\ &\quad 2\beta Re(xy^*) + 2Tr(M_d)Re(bf^*) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

et finalement,

$$\begin{aligned} Tr(M_u^2 M_d^2) &= |x|^2 |y|^2 + (|f|^2 + d^2)(|b|^2 + a^2) \\ &\quad + (|b|^2 + |x|^2 + \alpha^2)(\beta^2 + |f|^2 + |y|^2) \\ &\quad + 2Tr(M_u)Tr(M_d)Re(bf^*) \\ &\quad + 2\alpha\beta Re(xy^*) + 2Re(xy^* bf^*) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

De la représentation des matrices M_u et M_d dans la base diagonale, on déduit l'expression de leurs traces et de leurs déterminants. On obtient:

$$\begin{aligned} Tr(M_{u,d}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr(M_{u,d}^D) \\ Tr(M_{u,d}^2) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = Tr[(M_{u,d}^D)^2] \\ Det(M_{u,d}) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = Det(M_{u,d}^D) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

où M^D représente la matrice diagonale. À partir de M_u , on obtient:

$$a = Tr(M_u) - \alpha \quad (4.2.14)$$

avec

$$Tr(M_u) = m_u - m_c + m_t \quad (4.2.15)$$

$$Det(M_u) = -|x|^2 a = -m_u m_c m_t \quad (4.2.16)$$

$$|x|^2 = \frac{m_u m_c m_t}{m_u - m_c + m_t - \alpha} \quad (4.2.17)$$

$$\begin{aligned} Tr(M_u^2) &= m_u^2 + m_c^2 + m_t^2 = \alpha^2 + a^2 + 2(|x|^2 + |b|^2) \\ &= Tr^2(M_u) - 2\alpha Tr(M_u) + 2\alpha^2 + 2(|x|^2 + |b|^2) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

d'où

$$|x|^2 + |b|^2 = m_c(m_u + m_t) - m_u m_t - \alpha^2 + \alpha(m_u - m_c + m_t) \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} |b|^2 &= m_c(m_u + m_t) - m_u m_t - \alpha^2 + \alpha(m_u - m_c + m_t) \\ &\quad - \frac{m_u m_c m_t}{(m_u - m_c - m_t - \alpha)} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$a = m_u - m_c + m_t - \alpha$$

$$d = m_d - m_s + m_b - \beta$$

$$|x| = \sqrt{\frac{m_c m_t m_u}{-\alpha - m_c + m_t + m_u}} \quad (4.2.21)$$

$$|y| = \sqrt{\frac{m_b m_d m_s}{-\beta + m_b + m_d - m_s}} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} |f|^2 &= -\beta^2 - m_b m_d + \beta(m_b + m_d - m_s) + (m_b + m_d)m_s \\ &\quad - \frac{m_b m_d m_s}{(-\beta + m_b + m_d - m_s)} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

À ce stade, on a réussi à exprimer les traces (et donc les V_{ij}) en fonction de α , β et des six masses.

Donc, α et β sont maintenant directement reliés aux observables physiques. Il en résulte que toute information sur α et β est d'une très grande importance puisqu'elle nous permet d'avoir plus d'information sur les observables.

Dans la littérature, α et β ont des valeurs arbitraires. S. Rajpoot [18], sans justification rigoureuse, pose $\alpha \leq m_c$ en premier lieu. Ensuite, il le fixe à m_c , tandis que β est fixé à 0 sans plus d'explication.

Dongsheng Du et Zhi-zhong Xing [18] traitent les deux paramètres comme une correction perturbative de premier ordre et les forcent à être dans l'intervalle $[0, m_c]$ pour α et $[0, m_s]$ pour β .

Nous allons montrer qu'il est possible d'avoir des contraintes rigoureuses sur leurs valeurs permises sans avoir besoin de spéculer.

4.3 Contraintes sur les paramètres α et β :

Les matrices de masses M_u et M_d sont des matrices hermitiques. Une propriété des matrices hermitiques est la suivante: quelle que soit la base dans laquelle elles sont exprimées, leurs éléments diagonaux doivent être compris entre la plus petite et la plus grande valeur propre [20].

Dans notre cas, les masses, qui sont les valeurs propres, possèdent un spectre hiérarchique $m_u \ll m_c \ll m_t$. Il s'en suit que:

$$-m_c \leq \alpha \leq m_t \quad (4.3.1)$$

$$-m_s \leq \beta \leq m_b \quad (4.3.2)$$

De plus, à partir de la positivité des éléments $|x|$ et $|y|$, on peut restreindre davantage les intervalles de α et β . Dans les expressions de $|x|^2$ et $|y|^2$, (4.2.17) et (4.2.22) le dénominateur doit être strictement positif, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \alpha &< m_t - m_c + m_u \\ \beta &< m_b - m_s + m_d \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

La positivité des éléments $|b|$ et $|f|$ réduit encore l'intervalle de α et β :

$$\begin{aligned} |b|^2 &= \frac{(m_c - m_u + \alpha)(m_t - m_c - \alpha)(m_t + m_u - \alpha)}{m_u - m_c + m_t - \alpha} \\ |f|^2 &= \frac{(m_s - m_d + \beta)(m_b - m_s - \beta)(m_b + m_d - \beta)}{m_d - m_s + m_b - \beta} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} m_u - m_c &< \alpha < m_t - m_c \\ m_d - m_s &< \beta < m_b - m_s \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Les racines de $|b|$ et $|f|$ sont:

$$\begin{cases} \alpha = m_u - m_c \\ \alpha = m_t - m_c \end{cases} \text{ pour } |b| \text{ et } \begin{cases} \beta = m_b - m_s \\ \beta = m_d - m_s \end{cases} \text{ pour } |f| \quad (4.3.6)$$

Quand α est égale à l'une des racines de $|b|$ et β égale à l'une des racines de $|f|$, $b = f = 0$ et les matrices des masses deviennent:

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x^* & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}; \quad M_d = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y^* & \beta & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (4.3.7)$$

Dans ce cas M_u et M_d , peuvent être divisées en blocs 2×2 . Elles sont donc diagonalisables par une sous-matrice 2×2 orthogonale. Il en résulte:

$$V_{KM}^0 = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & 0 \\ V_{cd} & V_{cs} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

où V_{KM}^0 représente le mélange des deux premières générations uniquement tandis que la troisième génération s'est complètement découplée.

Lorsque la troisième génération se découple, $V_{ub} = V_{cb} = V_{td} = V_{ts} = 0$ et la matrice V_{KM}^0 décrit le mélange des deux première générations seulement. Or, on sait très bien que le mélange des deux premières générations est fidèlement décrit par l'angle de Cabbibo. Dans notre cas, de toutes les racines de α et β données par (4.3.6), seul le cas

$$\begin{cases} \alpha = m_u - m_c \\ \text{et} \\ \beta = m_d - m_s \end{cases} \quad (4.3.9)$$

conduit à une valeur en bon accord avec la valeur mesurée de l'angle de Cabbibo. Dans ce cas, à partir de l'expression de $|V_{us}|$ on trouve

$$\sin^2 \theta_c = \frac{m_c m_d + m_u m_s}{(m_d + m_s)(m_c + m_u)} - \frac{2\sqrt{m_u m_d m_s m_c}}{(m_d + m_s)(m_c + m_u)} \cos \delta_x \quad (4.3.10.a)$$

$$\cos \delta_x = \frac{m_c m_d + m_u m_s - (m_d + m_s)(m_c + m_u)|V_{us}|^2}{\sqrt{4m_u m_c m_d m_s}} \quad (4.3.10.b)$$

L'équation (4.3.10.b) nous donne $\theta_c \simeq \pi/2$.

Le résultat précédent nous permet d'une part, d'approximer l'angle δ_x par $\frac{\pi}{2}$ et d'autre part, d'écrire la forme exacte de V_{KM} comme une perturbation autour de V_{KM}^0 .

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c & 0 \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1 + \epsilon) \quad (4.3.11)$$

où ϵ est la matrice de mélange résultant de la perturbation autour de $\alpha = m_u - m_c$ et $\beta = m_d - m_s$.

Introduisons deux nouveaux paramètres ϵ_1 et ϵ_2 définis comme suit:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\alpha + m_c - m_u}{m_t} \\ \epsilon_2 &= \frac{\beta + m_s - m_d}{m_b} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Vu l'importance des masses respectives de m_t et m_b par rapport aux autres masses, ces deux nouveaux paramètres vont servir comme guide pour l'ordre de grandeur et nous permettre de décider quels termes nous devons garder et quels termes nous pouvons négliger. On va procéder à la perturbation des $|V_{ij}|$ au premier ordre en ϵ_1 et ϵ_2 , qui sont $\ll 1$.

Avant d'approximer les $|V_{ij}|$, nous allons en premier lieu diagonaliser les matrices des masses M_u et M_d . Ensuite nous les exprimerons en fonction de α , β , des six masses et des deux angles δ_x et δ_b .

4.4 Diagonalisation de la matrice de Fritzsch modifiée

Les matrices M_u et M_d sont des matrices hermitiques, donc α , d , a , et β sont réels. En exploitant la liberté de transformation de phase que possèdent les champs des quarks, on va montrer qu'avec un choix judicieux de la matrice de rephasage P , x , y , b et f deviennent réels positifs.

M_u et M_d s'écrivent:

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & |x|e^{i\delta_x} & 0 \\ |x|e^{-i\delta_x} & \alpha & |b|e^{i\delta_b} \\ 0 & |b|e^{-i\delta_b} & a \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$M_d = \begin{pmatrix} 0 & |y|e^{i\delta_y} & 0 \\ |y|e^{-i\delta_y} & \beta & |f|e^{i\delta_f} \\ 0 & |f|e^{-i\delta_f} & d \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

Définissons les matrices P_u et P_d de transformation de phase comme suit:

$$P_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\delta_x+\delta_b)} \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$P_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_y} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\delta_y+\delta_f)} \end{pmatrix} \quad (4.4.4)$$

$$M'_u = P_u^\dagger M_u P_u = \begin{pmatrix} 0 & |x| & 0 \\ |x| & \alpha & |b| \\ 0 & |b| & a \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

$$M'_d = P_d^\dagger M_d P_d = \begin{pmatrix} 0 & |y| & 0 \\ |y| & \beta & |f| \\ 0 & |f| & d \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

M'_u et M'_d sont des matrices réelles symétriques. Elles sont donc diagonalisables par deux matrices orthogonales O_u et O_d . Notons que

$$Tr(M_u) = Tr(M'_u) = Tr(M_u^D) \quad (4.4.8)$$

et

$$Tr(M_d) = Tr(M'_d) = Tr(M_d^D) \quad (4.4.9)$$

$$\begin{aligned} M_u^D &= O_u^T M'_u O_u. \\ &= O_u^T P_u^\dagger M_u P_u O_u \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Puisque M_u est hermitique, elle est diagonalisable par une matrice unitaire.

$$M_u^D = U^\dagger M_u U = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & -m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (4.4.11)$$

d'où $U = P_u O_u$ et similairement $V = P_d O_d$, où

$$O_u = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}; \text{ et } O_d = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \quad (4.4.12)$$

On va chercher les valeurs propres et vecteurs propres de M'_u . Ceux de M'_d se calculent de manière identique.

$$\begin{pmatrix} 0 & |x| & 0 \\ |x| & \alpha & |b| \\ 0 & |b| & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = m_u \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} \quad (4.4.13)$$

Ce qui donne les équations suivantes:

$$\begin{aligned} |x|p_{21} &= m_u p_{11} \\ |x|p_{11} + \alpha p_{21} + |b|p_{21} &= m_u p_{21} \\ |b|p_{21} + ap_{31} &= m_u p_{31} \\ p_{21} &= \frac{m_u}{|x|} p_{11} \end{aligned} \quad (4.4.14.a)$$

$$\begin{aligned} (m_u - a)p_{31} &= \frac{|b|m_u}{|x|} p_{11} \\ p_{31} &= \frac{|b|m_u p_{11}}{|x|(m_u - a)} \end{aligned} \quad (4.4.14.b)$$

La matrice O_u est une matrice unitaire, les p_{j1} vérifient la relation:

$$\begin{aligned} p_{11}^2 + p_{21}^2 + p_{31}^2 &= p_{11}^2 \left[1 + \frac{m_u^2}{|x|^2} + \frac{|b|^2 m_u^2}{|x|^2 (m_u - a)^2} \right] = 1 \\ p_{11}^2 \left[\frac{|x|^2 (m_u - a)^2 + m_u^2 (m_u - a)^2 + |b|^2 m_u^2}{|x|^2 (m_u - a)^2} \right] &= 1 \\ p_{11} &= \frac{|x|(m_u - a)}{\left[(|x|^2 + m_u^2)(m_u - a)^2 + |b|^2 m_u^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

L'équation (4.4.14.a) nous permet d'avoir:

$$p_{21} = \frac{m_u(m_u - a)}{\left[(|x|^2 + m_u^2)(m_u - a)^2 + |b|^2 m_u^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.4.16)$$

De l'équation (4.4.14.b), on obtient:

$$p_{31} = \frac{|b|m_u}{\left[(|x|^2 + m_u^2)(m_u - a)^2 + |b|^2 m_u^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.4.17)$$

De même, le vecteur propre associé à la valeur propre $-m_c$ vérifie l'équation:

$$\begin{pmatrix} 0 & |x| & 0 \\ |x| & \alpha & |b| \\ 0 & |b| & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = -m_c \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} \quad (4.4.18)$$

similairement pour la valeur propre m_t , Ceci donne:

$$\begin{aligned} p_{12} &= \frac{-|x|(m_c + a)}{\left[(|x|^2 + m_c^2)(m_c + a)^2 + |b|^2 m_c^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ p_{22} &= \frac{m_c(m_c + a)}{\left[(|x|^2 + m_c^2)(m_c + a)^2 + |b|^2 m_c^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ p_{32} &= \frac{-|b|m_c}{\left[(|x|^2 + m_c^2)(m_c + a)^2 + |b|^2 m_c^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ p_{13} &= \frac{|x|(m_t - a)}{\left[(|x|^2 + m_t^2)(m_t - a)^2 + |b|^2 m_t^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ p_{23} &= \frac{m_t(m_t - a)}{\left[(|x|^2 + m_t^2)(m_t - a)^2 + |b|^2 m_t^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ p_{33} &= \frac{|b|m_t}{\left[(|x|^2 + m_t^2)(m_t - a)^2 + |b|^2 m_t^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

Le calcul des valeurs et vecteurs propres de M_d' se fait de façon similaire.

$$M_d^D = O_d^T M_d' O_d = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & -m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \quad (4.4.20)$$

$$O_d = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \quad (4.4.21)$$

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{|y|(m_d - d)}{\left[(|y|^2 + m_d^2)(m_d - d)^2 + |f|^2 m_d^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{21} &= \frac{m_d(m_d - d)}{\left[(|y|^2 + m_d^2)(m_d - d)^2 + |f|^2 m_d^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{31} &= \frac{|f|m_d}{\left[(|y|^2 + m_d^2)(m_d - d)^2 + |f|^2 m_d^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{12} &= \frac{-|y|(m_s + d)}{\left[(|y|^2 + m_s^2)(m_s + d)^2 + |f|^2 m_s^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{22} &= \frac{m_s(m_s + d)}{\left[(|y|^2 + m_s^2)(m_s + d)^2 + |f|^2 m_s^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{32} &= \frac{-|f|m_s}{\left[(|y|^2 + m_s^2)(m_s + d)^2 + |f|^2 m_s^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{13} &= \frac{|y|(m_b - d)}{\left[(|y|^2 + m_b^2)(m_b - d)^2 + |b|^2 m_b^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{23} &= \frac{m_b(m_b - d)}{\left[(|y|^2 + m_b^2)(m_b - d)^2 + |b|^2 m_b^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ q_{33} &= \frac{|b|m_b}{\left[(|y|^2 + m_b^2)(m_b - d)^2 + |b|^2 m_b^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

La matrice de mélange de Kobayashi-Maskawa est donnée par $V_{KM} = U^\dagger V = O_u^T P_u^\dagger P_d O_d$

$$P_u^\dagger P_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix} \quad (4.4.23)$$

Avec $\phi_1 = \delta_x - \delta_y$ et $\phi_2 - \phi_1 = \delta_b - \delta_f$. Puisque c'est la phase relative qui est importante, nous pouvons choisir les phases de sorte que: $\delta_y = \delta_f = 0$. Ce qui donne: $\phi_1 = \delta_x$ et $\phi_2 - \phi_1 = \delta_b$

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (4.4.24)$$

On obtient l'expression des éléments V_{ij} de la matrice de mélange:

$$\begin{aligned} V_{ud} &= p_{11}q_{11} + p_{21}q_{21}e^{i\delta_x} + p_{31}q_{31}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{us} &= p_{11}q_{12} + p_{21}q_{22}e^{i\delta_x} + p_{31}q_{32}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{ub} &= p_{11}q_{13} + p_{21}q_{23}e^{i\delta_x} + p_{31}q_{33}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{cd} &= p_{12}q_{11} + p_{22}q_{21}e^{i\delta_x} + p_{32}q_{31}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{cs} &= p_{12}q_{12} + p_{22}q_{22}e^{i\delta_x} + p_{32}q_{32}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{cb} &= p_{12}q_{13} + p_{22}q_{23}e^{i\delta_x} + p_{32}q_{33}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{td} &= p_{13}q_{11} + p_{23}q_{21}e^{i\delta_x} + p_{33}q_{31}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{ts} &= p_{13}q_{12} + p_{23}q_{22}e^{i\delta_x} + p_{33}q_{32}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \\ V_{tb} &= p_{13}q_{13} + p_{23}q_{23}e^{i\delta_x} + p_{33}q_{33}e^{i(\delta_x+\delta_b)} \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

4.5 Approximation des éléments des matrices O_u et O_d

On a montré dans l'équation (4.3.6), que lorsque α et β tendent respectivement vers leurs limites inférieures permises, la troisième génération se découple et on se retrouve avec une très bonne approximation de l'angle de mélange des deux premières générations: l'angle de Cabbibo. Ceci démontre la petitesse des paramètres α et β et justifie la perturbation au premier ordre des éléments de la matrice de mélange autour de ϵ_1 et ϵ_2 .

Dans cette approximation, on trouve:

$$|x|^2 = \frac{m_u m_c m_t}{m_t + m_u - m_c - \alpha} = \frac{m_u m_c}{1 - \epsilon_1} \simeq m_u m_c (1 + \epsilon_1) \quad (4.5.1)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
|x| &\simeq \sqrt{m_u m_c} \sqrt{1 + \epsilon_1} \simeq \sqrt{m_u m_c} (1 + \frac{1}{2} \epsilon_1) \\
|y|^2 &= \frac{m_b m_d m_s}{-\beta + m_b + m_d - m_s} = \frac{m_d m_s}{1 - \epsilon_2} \\
&\simeq m_d m_s (1 + \epsilon_2) \\
|y| &\simeq \sqrt{m_d m_s} (1 + \frac{1}{2} \epsilon_2) \\
|b|^2 &= \frac{(m_c - m_u + \alpha)(m_t - m_c - \alpha)(m_t + m_u - \alpha)}{m_u - m_c + m_t - \alpha} \\
&= \frac{\epsilon_1 m_t (m_t - \epsilon_1 m_t + m_c)(m_t - \epsilon_1 m_t - m_u)}{m_t (1 - \epsilon_1)} \\
&= \frac{\epsilon_1 [m_t (1 - \epsilon_1) - m_u] [m_t (1 - \epsilon_1) + m_c]}{(1 - \epsilon_1)} \\
&\simeq \epsilon_1 m_t^2 \left[1 - \epsilon_1 + \frac{m_c}{m_t} \right]
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

De même pour f ,

$$\begin{aligned}
|f|^2 &= \epsilon_2 m_b^2 \left[1 - \epsilon_2 + \frac{m_s}{m_b} \right] \\
a &= m_t - m_c + m_u - \alpha = m_t (1 - \epsilon_1) \\
d &= m_b (1 - \epsilon_2)
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Dans l'expression des p_{ij} , il y a trois dénominateurs différents que l'on nomme D_1 , D_2 et D_3 :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left[(|x|^2 + m_u^2)(m_u - a)^2 + |b|^2 m_u^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
D_2 &= \left[(|x|^2 + m_c^2)(m_c + a)^2 + |b|^2 m_c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
D_3 &= \left[(|x|^2 + m_t^2)(m_t - a)^2 + |b|^2 m_t^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

En substituant les expressions (4.5.1) à (4.5.3) dans les D_i , ils deviennent:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left[(m_u m_c (1 + \epsilon_1) + m_u^2)(m_u - m_t (1 - \epsilon_1))^2 \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_1 m_u^2 m_t (m_t (1 - \epsilon_1) + m_c) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq \left[m_u^3 m_c (1 + \epsilon_1) + m_u m_c m_t^2 (1 + \epsilon_1) (1 - 2\epsilon_1) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2m_u^2 m_c m_t (1 + \epsilon_1)(1 - \epsilon_1) + m_u^2 m_t^2 (1 - 2\epsilon_1) \\
& -2m_u^3 m_t (1 - \epsilon_1) + \epsilon_1 m_u^2 m_t^2 (1 - \epsilon_1) + \epsilon_1 m_u^2 m_c m_t \Big]^\frac{1}{2} \\
& \simeq \left[m_u m_c m_t^2 \left[1 - \epsilon_1 + \frac{m_u}{m_c} - 2\epsilon_1 \frac{m_u}{m_c} \right] \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq m_t \sqrt{m_u m_c} \left[1 - \epsilon_1 + \frac{m_u}{m_c} \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq m_t \sqrt{m_u m_c} \left[1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_u}{m_c} \right] \tag{4.5.5.a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \left[(m_u m_c (1 + \epsilon_1) + m_c^2) (m_c + m_t (1 - \epsilon_1))^2 \right. \\
& \quad \left. + \epsilon_1 m_t (m_t (1 - \epsilon_1) + m_c) m_c^2 \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq \left[m_c^3 m_u (1 + \epsilon_1) + m_u m_c m_t^2 (1 + \epsilon_1)(1 - 2\epsilon_1) + 2m_c^2 m_u m_t + m_c^4 + \right. \\
& \quad \left. + m_c^2 m_t^2 (1 - 2\epsilon_1) + 2m_c^3 m_t (1 - \epsilon_1) + \epsilon_1 m_c^2 m_t^2 + \epsilon_1 m_c^3 m_t \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq \left[m_c^2 m_t^2 \left[\frac{m_c m_u (1 + \epsilon_1)}{m_t^2} + 1 + \frac{2m_c}{m_t} (1 - \epsilon_1) + \frac{m_c^2}{m_t^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{m_u}{m_c} (1 - \epsilon_1) - \epsilon_1 + \frac{\epsilon_1 m_c}{m_t} + \frac{2m_u}{m_t} \right] \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq m_c m_t \left[1 + \frac{m_u}{m_c} + \frac{2m_c}{m_t} - \epsilon_1 \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq m_c m_t \left[1 + \frac{m_u}{2m_c} + \frac{m_c}{m_t} - \frac{\epsilon_1}{2} \right] \tag{4.5.5.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \left[(m_u m_c (1 + \epsilon_1) + m_t^2) (m_t - m_t (1 - \epsilon_1))^2 \right. \\
& \quad \left. + \epsilon_1 m_t^3 (m_t (1 - \epsilon_1) + m_c) \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq \left[(m_u m_c (1 + \epsilon_1) + m_t^2) m_t^2 \epsilon_1^2 + \epsilon_1 m_t^4 (1 - \epsilon_1 + \frac{m_c}{m_t}) \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq \left[\epsilon_1^2 m_t^4 \left(\epsilon_1 + \frac{m_u m_c \epsilon_1 (1 + \epsilon_1)}{m_t^2} + 1 + \frac{m_c}{m_t} \right) \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq m_t^2 \sqrt{\epsilon_1} \left[1 + \frac{m_c}{m_t} \right]^\frac{1}{2} \\
& \simeq m_t^2 \sqrt{\epsilon_1} \left[1 + \frac{m_c}{2m_t} \right] \tag{4.5.5.c}
\end{aligned}$$

Ayant calculé les dénominateurs et les éléments x, y, b, f, a et d , on est en

mesure d'exprimer les éléments p_{ij} de O_u et q_{ij} de O_d au premier ordre en ϵ_1 et ϵ_2 . Il vient:

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \frac{|x|(m_u - a)}{D_1} \\
 &\simeq \frac{\sqrt{m_u m_c}(1 + \frac{\epsilon_1}{2})[m_u - m_t(1 - \epsilon_1)]}{m_t \sqrt{m_u m_c}} \left[1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_u}{m_c}\right] \\
 &\simeq \frac{m_u}{m_t} - 1 + \frac{m_u}{2m_c} \\
 &\simeq -1 + \frac{m_u}{2m_c} \tag{4.5.6.a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{21} &= \frac{m_u(m_u - a)}{D_1} \\
 &\simeq \frac{m_u(m_u - m_t(1 - \epsilon_1))}{m_t \sqrt{m_u m_c}} \left[1 + \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{m_u}{2m_c}\right] \\
 &\simeq \sqrt{\frac{m_u}{m_c}}(-1 + \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{m_u}{2m_c}) \tag{4.5.6.b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{31} &= \frac{|b|m_u}{D_1} \\
 &\simeq \frac{m_u m_t \sqrt{\epsilon_1}(1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{m_c}{2m_t})}{m_t \sqrt{m_u m_c}} \left[1 + \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{m_u}{2m_c}\right] \\
 &\simeq \sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u}{m_c}} \left(1 - \frac{m_u}{2m_c} + \frac{m_c}{2m_t}\right) \tag{4.5.6.c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{12} &\simeq -\frac{\sqrt{m_u m_c}}{m_t m_c} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon_1\right) \left(m_c + m_t(1 - \epsilon_1)\right) \left(1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{m_t} + \frac{\epsilon_1}{2}\right) \\
 &\simeq -\frac{\sqrt{m_u}}{m_t \sqrt{m_c}} \left((m_c + m_t - \epsilon_1 m_t) \left(1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{m_t} + \frac{\epsilon_1}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\epsilon_1}{2} m_t + \frac{\epsilon_1}{2} m_c\right) \left(1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{m_t} + \frac{\epsilon_1}{2}\right)\right) \\
 &\simeq -\sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \left(1 - \frac{m_u}{2m_c}\right) \tag{4.5.6.d}
 \end{aligned}$$

$$p_{22} = \frac{m_c(m_c + a)}{D_2}$$

$$\begin{aligned}
&= -p_{21} \sqrt{\frac{m_c}{m_u}} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{m_c}{2m_t} - \frac{m_u}{2m_c}\right) \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2}\right) \\
&\simeq 1 - \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{m_c}{2m_t} - \frac{m_u}{2m_c}
\end{aligned} \tag{4.5.6.e}$$

$$\begin{aligned}
p_{32} &= \frac{-|b|m_c}{D_2} \\
&\simeq -\sqrt{\epsilon_1} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{m_c}{2m_t}\right) \left(1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{m_t} + \frac{\epsilon_1}{2}\right) \\
&\simeq -\sqrt{\epsilon_1} \left(1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{2m_t}\right)
\end{aligned} \tag{4.5.6.f}$$

$$\begin{aligned}
p_{13} &= \frac{|x|(m_t - a)}{D_3} \\
&\simeq \frac{\sqrt{m_u m_c} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{2}\right) \epsilon_1 m_t}{m_t^2 \sqrt{\epsilon_1} \left(1 + \frac{m_c}{2m_t}\right)} \\
&\simeq \frac{\sqrt{\epsilon_1 m_u m_c}}{m_t} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{2}\right) \left(1 - \frac{m_c}{2m_t}\right) \\
&\simeq \frac{\sqrt{\epsilon_1 m_u m_c}}{m_t} \left[1 - \frac{m_c}{2m_t} + \frac{\epsilon_1}{2}\right]
\end{aligned} \tag{4.5.6.g}$$

$$\begin{aligned}
p_{23} &= \frac{m_t(m_t - a)}{D_3} \\
&\simeq \frac{\epsilon_1 m_t^2}{m t^2 \sqrt{\epsilon_1}} \left(1 - \frac{m_c}{m_t}\right) \\
&= \sqrt{\epsilon_1} \left(1 - \frac{m_c}{2m_t}\right)
\end{aligned} \tag{4.5.6.h}$$

$$\begin{aligned}
p_{33} &= \frac{|b|m_t}{D_3} \\
&\simeq \frac{m_t^2 \sqrt{\epsilon_1} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{m_c}{2m_t}\right)}{m_t^2 \sqrt{\epsilon_1} \left(1 + \frac{m_c}{2m_t}\right)} \\
&\simeq \left(1 - \frac{\epsilon_1}{2} + \frac{m_c}{2m_t}\right) \left(1 - \frac{m_c}{2m_t}\right) \\
&\simeq 1 - \frac{\epsilon_1}{2}
\end{aligned} \tag{4.5.6.i}$$

Nous passons maintenant à la matrice de mélange.

4.6 Approximation des éléments V_{ij} de la matrice de mélange

Les V_{ij} sont donnés par l'équation (4.4.25). On vient de calculer les expressions approximées des p_{ij} et q_{ij} . En les insérant dans les expressions des V_{ij} , on en obtiendra une approximation.

Commençons par les éléments diagonaux de la matrice de mélange. Ces éléments sont: V_{ud} , V_{cs} et V_{tb} .

$$\begin{aligned} V_{ud} &\simeq 1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_d}{2m_s} + \sqrt{\frac{m_u m_d}{m_c m_s}} e^{i\delta_x} \left(1 - \frac{m_d}{2m_s} - \frac{m_u}{2m_c}\right) \\ &\simeq 1 - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_d}{2m_s} \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

$$\begin{aligned} V_{cs} &\simeq \sqrt{\frac{m_u m_d}{m_c m_s}} \left(1 - \frac{m_d}{2m_s} - \frac{\epsilon_2}{2} - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{\epsilon_1}{2}\right) \\ &\quad + e^{i\delta_x} \left(1 - \frac{m_d}{2m_s} - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{\epsilon_2}{2} - \frac{\epsilon_1}{2} - \frac{m_s}{2m_b} - \frac{m_c}{2m_t}\right) \\ &\quad + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} e^{i(\delta_x + \delta_b)} \left(1 - \frac{m_s}{2m_b} - \frac{m_c}{2m_t}\right) \\ &\simeq e^{i\delta_x} (1 + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} e^{i\delta_b}) \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

$$\begin{aligned} V_{tb} &\simeq \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(1 - \frac{m_d}{2m_s} - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{2m_t} - \frac{m_s}{2m_b}\right) e^{i\delta_x} \\ &\quad + e^{i(\delta_x + \delta_b)} \left(1 - \frac{\epsilon_2}{2} - \frac{\epsilon_1}{2}\right) \\ &\simeq (\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} + e^{i\delta_b}) e^{i\delta_x} \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Les éléments non diagonaux supérieurs, V_{us} , V_{ub} et V_{cb} s'écrivent:

$$\begin{aligned} V_{us} &\simeq \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \left(1 - \frac{m_d}{2m_s}\right) - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\delta_x} \\ &\simeq \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\delta_x} \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

$$V_{cb} \simeq (\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} e^{i\delta_b}) e^{i\delta_x} \quad (4.6.5)$$

$$\begin{aligned}
V_{ub} &\simeq \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2}} \left(1 - \frac{m_s}{2m_b} + \frac{\epsilon_2}{2}\right) \\
&\quad - \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_u}{m_c}} \left(1 - \frac{m_s}{2m_b} - \frac{m_u}{2m_c} + \frac{\epsilon_1}{2}\right) e^{i(\delta_x + \delta_b)} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u}{m_c}} e^{i(\delta_x + \delta_b)} \left(1 - \frac{\epsilon_2}{2} - \frac{m_u}{2m_c} - \frac{m_c}{2m_t}\right) \\
&\simeq \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} e^{i\delta_x} [\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} e^{i\delta_b}]
\end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Donc V_{ub} peut s'écrire en fonction de V_{cb} comme:

$$V_{ub} \simeq \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} V_{cb} \tag{4.6.7}$$

En ce qui concerne les éléments non diagonaux inférieurs (V_{cd} , V_{td} et V_{ts}) bien qu'on puisse les obtenir de façon similaire à celle des éléments non diagonaux supérieurs, il est plus facile de les obtenir à partir de ces derniers en interchangeant les "up" en "down" et ϵ_1 en ϵ_2 . Faisant ainsi, V_{cd} s'obtient à partir de V_{us} :

$$V_{cd} \simeq \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} - \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} e^{i\delta_x} \tag{4.6.8}$$

V_{ts} se déduit de V_{cb} :

$$V_{ts} \simeq (\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} e^{i\delta_b}) e^{i\delta_x} \tag{4.6.9}$$

Et V_{td} se déduit de V_{ub} :

$$\begin{aligned}
V_{td} &\simeq -\sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u m_c}{m_t^2}} - \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} [\sqrt{\epsilon_1} e^{i\delta_x} - \sqrt{\epsilon_2} e^{i(\delta_x + \delta_b)}] \\
&\simeq \sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u m_c}{m_t^2}} - \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} V_{ts}
\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

De l'équation (4.6.7), on obtient l'expression de $\frac{V_{ub}}{V_{cb}}$:

$$\frac{V_{ub}}{V_{cb}} \simeq \frac{1}{V_{cb}} \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \tag{4.6.11}$$

Et de l'équation (4.6.10), on déduit l'expression de $\frac{V_{td}}{V_{ts}}$

$$\frac{V_{td}}{V_{ts}} \simeq \frac{1}{V_{ts}} \sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u m_c}{m_t^2}} - \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \quad (4.6.12)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve les bornes inférieures et supérieures des rapports: $\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}$ et $\frac{|V_{td}|}{|V_{ts}|}$. De (4.6.11) on a:

$$\left| \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2 |V_{cb}|^2}} - \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \right| \leq \frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|} \leq \left| \sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2 |V_{cb}|^2}} + \sqrt{\frac{m_u}{m_c}} \right| \quad (4.6.13)$$

Et de (4.6.12) on déduit:

$$\left| \sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u m_c}{m_t^2 |V_{ts}|^2}} - \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \right| \leq \frac{|V_{td}|}{|V_{ts}|} \leq \left| \sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u m_c}{m_t^2 |V_{ts}|^2}} + \sqrt{\frac{m_d}{m_s}} \right| \quad (4.6.14)$$

4.7 Analyse graphique:

De l'expression générale des V_{ij} et à l'aide de l'inégalité triangulaire, une borne inférieure des éléments de mélange peut être calculée [18]. Elle est donnée par:

$$|V_{ij}| \geq \left| \frac{1}{N_i M_j} - \frac{|\lambda_i| |\gamma_j|}{N_i M_j |x| |y|} \right| \left| 1 + \frac{|b| |f| e^{i\delta_b}}{(\lambda_i - a)(\gamma_j - d)} \right| \quad (4.7.1)$$

où N_i et M_j sont respectivement les constantes de normalisation des vecteurs propres de M_u et M_d . Elles sont données par:

$$N_i^2 = 1 + \frac{\lambda_i^2}{|x|^2} \left(1 + \frac{|b|^2}{(\lambda_i - a)^2} \right), \quad M_j^2 = 1 + \frac{\gamma_j^2}{|y|^2} \left(1 + \frac{|f|^2}{(\gamma_j - d)^2} \right) \quad (4.7.2)$$

et λ_i et γ_j sont respectivement les valeurs propres des matrices M_u et M_d . Cette borne est très intéressante puisqu'elle est indépendante de δ_x . Pour l'analyse graphique, on va étudier le comportement des limites inférieures des V_{ij} données par l'équation (4.7.1), et des expressions exactes des 4 modules indépendants choisis auparavant, (4.2.7) à (4.2.10).

Les éléments qu'on a représentés graphiquement sont $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$. Les deux autres éléments sont généralement satisfaits et peu sensibles aux paramètres α et β .

Mentionnons que les graphiques 4.1 à 4.8 sont les graphes des valeurs exactes de $|V_{cb}|$ et $|V_{ub}|$ et non de leurs approximations.

Les paramètres α et β varient dans leurs intervalles permis respectifs donnés par (4.3.5). Les intervalles des éléments V_{ij} qu'on a utilisés sont ceux donnés par Particle Data Group [12]:

$$\begin{aligned} 0.035 &\leq |V_{cb}| \leq 0.055 \\ 0.001 &\leq |V_{ub}| \leq 0.005 \\ 0.15 &\leq |V_{us}| \leq 0.3 \\ 0.15 &\leq |V_{cd}| \leq 0.3 \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

Puisque m_t^{phys} s'obtient de $m_t(1 \text{ GeV})$ à l'aide de la relation [7]:

$$m_t^{phys} = m_t(m_t) \left[1 + \frac{4}{3\pi} \alpha_s + O(\alpha_s^2) \right]. \tag{4.7.4}$$

où α_s est l'intensité du couplage C.D.Q, on obtient $m_t(1\text{GeV}) \simeq 280 \text{ GeV}$.

Dans les figures 4.1 et 4.2, on représente la borne inférieure de $|V_{cb}|$ pour différentes valeurs de δ_b .

Les solutions pour $\delta_b = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = \pi$, (figures 4.1 (b) et 4.2 (a)), sont incluses dans les solutions pour le cas $\delta_b = 0$, (4.1 (a)). Ceci reflète le phénomène de découplage de la troisième génération, dans ce cas, $\alpha \rightarrow m_u - m_c$ et $\beta \rightarrow m_d - m_s$, la phase est indéterminée.

Les valeurs des angles δ_x et δ_b sont respectivement $\frac{\pi}{2}$ et 0 comme on l'a démontré dans la formule (4.3.10). Ceci motive l'étude du comportement de $|V_{ub}|$ et $|V_{cb}|$ en fonction de α et β pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$, ce qui est représenté à la figure 4.3.

Les figures 4.3 (b), représentent la borne inférieure de $|V_{ub}|$ pour $\delta_b = 0$, tandis qu'à la figure 4.3 (c), on représente la valeur exacte de $|V_{ub}|$. Cette

figure montre clairement que les paramètres α et β sont très petits par rapport à m_t et m_b et justifie davantage le calcul perturbatif des éléments de mélange qu'on a élaboré dans la section 4.6.

La figure 4.3 (d) représente les contours de $|V_{us}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$. Les coupes sont prises aux valeurs 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21 et 0.22. C'est un graphique à titre d'illustration car l'élément $|V_{us}|$ est presque toujours vérifié pour les différentes valeurs des angles.

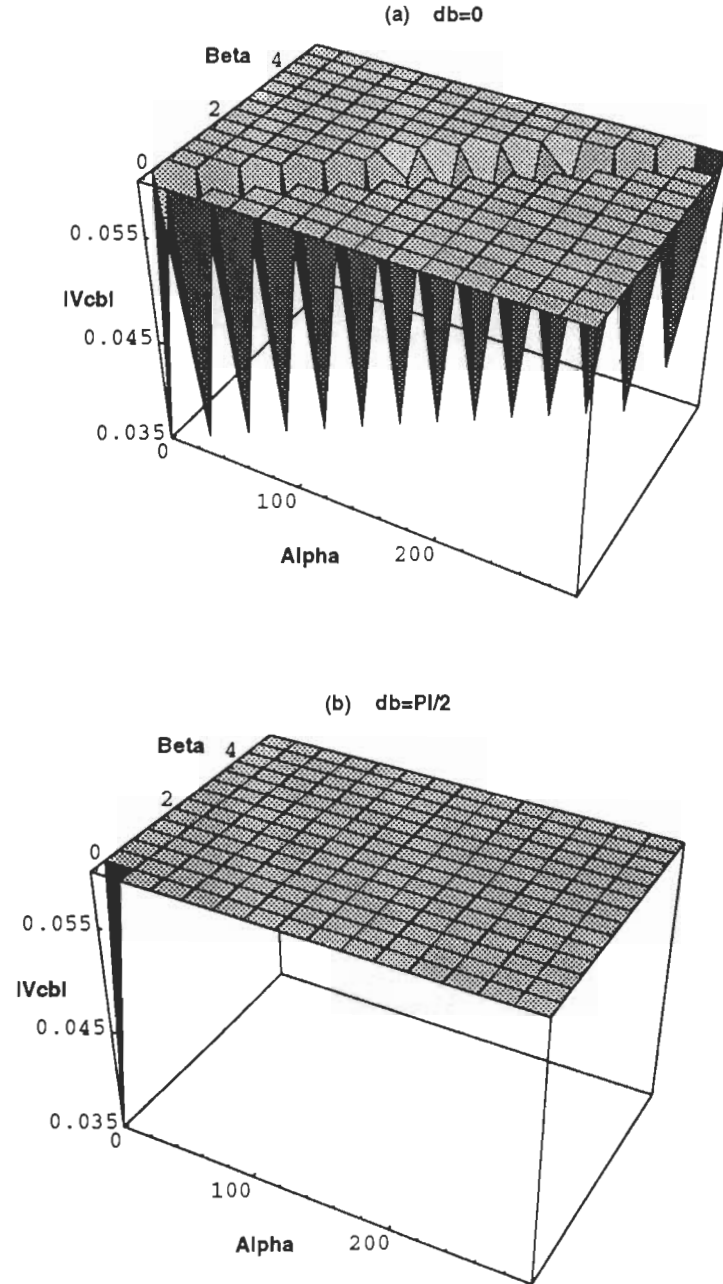


Figure 4.1. a) Borne inférieure de $|V_{cb}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$
 b) Borne inférieure de $|V_{cb}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = \frac{\pi}{2}$
 N.B: $db \rightarrow \delta_b$

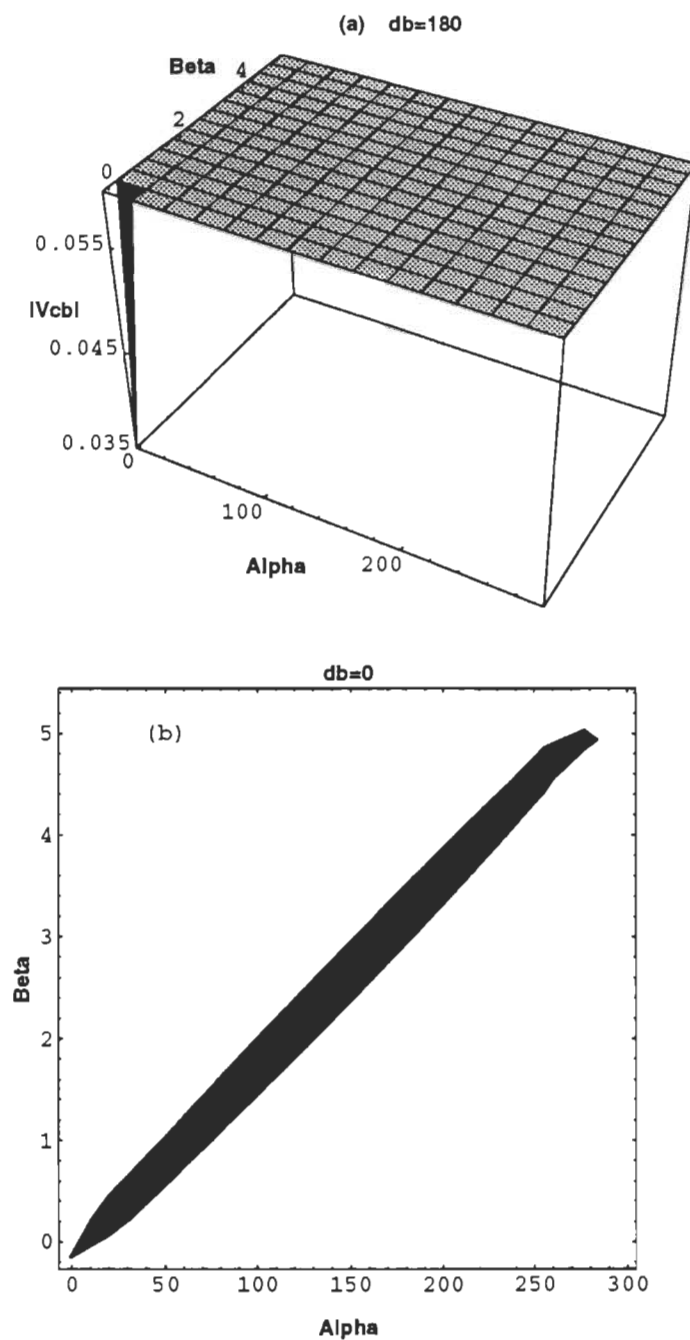


Figure 4.2. a) Borne inférieure de $|V_{cb}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = \pi$
 b) Contour de la borne inférieure de $|V_{cb}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$
 N.B: $db \rightarrow \delta_b$

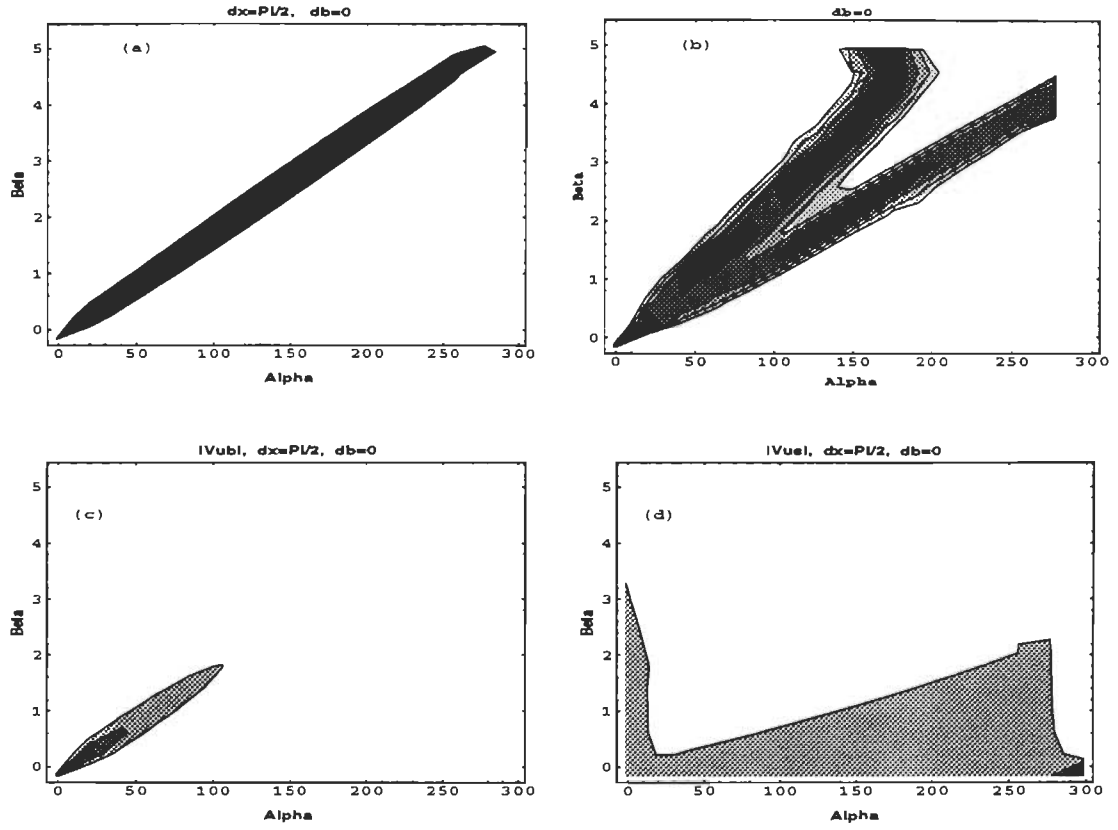


Figure 4.3. a) Contour de $|V_{cb}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$ et $\delta_x = \frac{\pi}{2}$
 b) Contour de la borne inférieure de $|V_{ub}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_b = 0$
 c) Contour de $|V_{ub}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$
 d) Contour de $|V_{us}| = f(\alpha, \beta)$ pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$
 N.B: $dx \rightarrow \delta_x$ et $db \rightarrow \delta_b$

4.8 Discussion:

À partir du graphe de $|V_{ub}|$ en fonction de α et β pour $\delta_x = \frac{\pi}{2}$ et $\delta_b = 0$, on constate que $\alpha \ll m_t$ et $\beta \ll m_b$. Par conséquent ϵ_1 et $\epsilon_2 \ll 1$. Notre perturbation des V_{ij} au premier ordre autour de ϵ_1 et ϵ_2 est donc bien fondée.

Dans l'expression du rapport $\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}$, (4.6.13), le terme $\sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2 |V_{cb}|^2}}$ n'est pas toujours petit et ne peut pas toujours être négligé. Il dépend de l'ordre de grandeur de ϵ_2 . Dans la littérature, [18], ce terme a été négligé, ce qui n'est pas tout à fait exact. Selon la grandeur de ϵ_2 , ce terme peut être du même ordre que $\sqrt{\frac{m_u}{m_c}}$.

Par contre dans le rapport $\frac{|V_{td}|}{|V_{ts}|}$, le terme $\sqrt{\frac{\epsilon_1 m_u m_c}{m_t^2 |V_{ts}|^2}}$ est toujours négligeable par rapport à $\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$ quelle que soit la valeur que prend le paramètre ϵ_1 dans son intervalle légitime ($0 \leq \epsilon_1 < 1$). Ceci est dû à l'importance du terme m_t^2 dans le dénominateur. Il est donc justifiable d'écrire $\frac{|V_{td}|}{|V_{ts}|} \simeq \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$.

Le couplage de la troisième génération affecte peu celui des deux premières générations. Ceci est démontré clairement à partir des expressions de V_{ub} , V_{cb} et V_{us} .

Les figures 4.2 (b) et 4.3 (a), (b) et (c) du chapitre IV nous permettent de conclure que $\epsilon_1 \simeq \epsilon_2$. En injectant cette relation dans l'expression (4.6.5) de V_{cb} , on obtient la relation suivante:

$$|V_{cb}| \simeq \sqrt{2 \epsilon_1 [1 - \cos(\delta_b)]} \quad (4.8.1)$$

où l'on a choisi $\delta_f = 0$. Quand $\epsilon_1 = 0$, $|V_{cb}| = 0$ quelle que soit la valeur de δ_b ce qui exprime le découplage de la troisième génération.

Un autre résultat très important découle immédiatement du fait que $\epsilon_1 \simeq \epsilon_2$. Dans ce cas, quand $\alpha = \beta = 0$, ce qui correspond à l'ansatz de Fritzsche, $\frac{m_c}{m_t} = \frac{m_s}{m_b}$ et $m_t = \frac{m_c m_b}{m_s}$. Évidemment cette valeur ne correspond pas à la valeur mesurée de la masse du top (174 ± 10 Gev). Ceci est une autre démonstration que le modèle de Fritzsche ne concorde pas avec l'expérience et n'est pas en mesure de prédire la bonne valeur de la masse du quark top.

À partir de l'expression de V_{cb} , (4.6.5), le module de V_{cb} peut être majoré comme suit:

$$|V_{cb}| \leq \sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} \quad (4.8.2)$$

d'où

$$1 \leq \frac{\epsilon_1}{(|V_{cb}| - \sqrt{\epsilon_2})^2} \quad (4.8.3)$$

où, rappelons-le, $\epsilon_1 = \frac{\alpha + m_c - m_u}{m_t}$ et $\epsilon_2 = \frac{\beta + m_s - m_d}{m_b}$. Ceci nous permet d'établir une majoration de la masse du quark top. Il vient que:

$$m_t \leq \frac{\alpha + m_c - m_u}{\left(|V_{cb}| - \sqrt{\frac{m_s - m_d + \beta}{m_b}} \right)^2} \quad (4.8.4)$$

De la comparaison de cette inégalité avec celle donnée par le modèle de Fritzsche, (3.4.13), il est clair que la présence des nouveaux paramètres α et β dans la relation (5.4) fait toute la différence. Ils permettent à l'ansatz de Fritzsche modifié d'accommoder la mesure expérimentale de la masse du top qui était le handicap fatal du modèle de Fritzsche.

Représentons graphiquement la relation (5.4), qui est la borne supérieure de la masse du top donnée par l'ansatz de Fritzsche modifié.

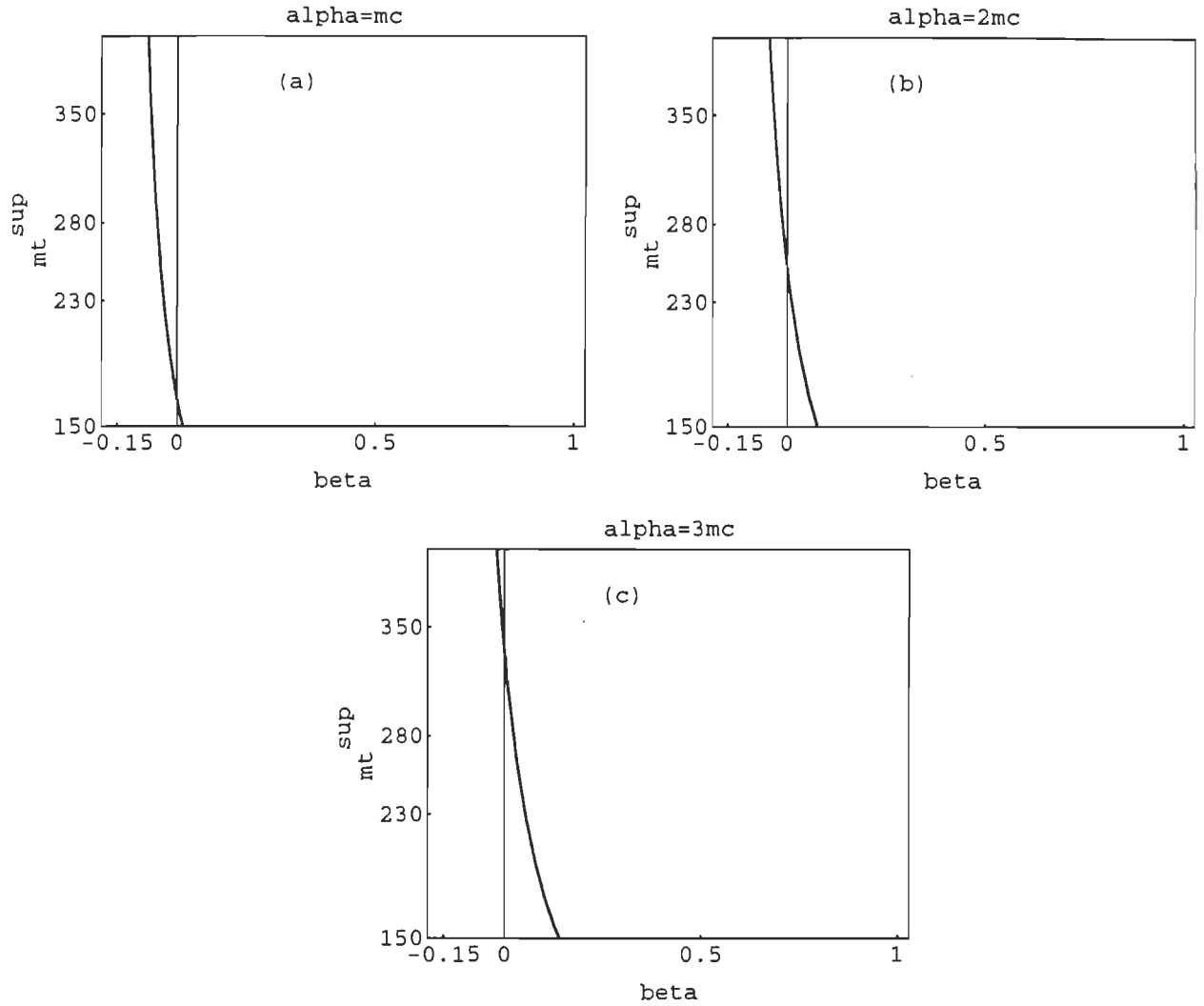


Figure 4.4. a) Borne supérieure de m_t pour $\alpha = m_c$
 b) Borne supérieure de m_t pour $\alpha = 2m_c$
 c) Borne supérieure de m_t pour $\alpha = 3m_c$

Dans les graphiques de la figure 5.1, on a représenté le comportement de la borne supérieure de la masse du top (5.4) en fonction de β pour différentes valeurs de α .

Pour $\alpha = m_c$, on a une borne supérieure de m_t autour de sa valeur expérimentale pour β dans l'intervalle $[-0.14, -0.13]$.

Vu l'importance de la masse du top, α peut prendre des valeurs dans un intervalle plus large que β . Pour $\alpha = 2 m_c$ et $\alpha = 3 m_c$, on est toujours dans

la zone où $\epsilon_1 \ll 1$. Même pour ces valeurs de α , β demeure très petit et son intervalle de solution s'élargit très peu. Pour $\alpha = 3 m_c$, β atteint à peine l'intervalle $[0, 0.01]$. Ceci démontre clairement que $\beta \ll m_b$.

Selon les auteurs de la référence [18], $\alpha \simeq m_c$, qui, d'après ce qu'on vient de voir, n'est pas une mauvaise approximation malgré le fait que α puisse être plusieurs fois cette valeur. Par contre en ce qui concerne β , il peut être confiné à un très petit intervalle de son domaine permis. S. Rajpoot [18] l'a pris égal à 0, ce qui concorde très bien avec nos conclusions, alors que Dongsheng Du et Zhi-zhong Xing [18] ont restreint son intervalle à $[0, m_s]$. On a montré que β est très petit; il est plutôt confiné à sa borne inférieure $m_d - m_s$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'ansatz de Fritzsche prédit une masse du quark top inférieure à 100 GeV, ce qui est en désaccord avec l'expérience.

On a montré dans ce mémoire que la version modifiée de l'ansatz de Fritzsche peut accommoder la valeur expérimentale de m_t (174 ± 10 GeV). La borne supérieure de cette masse est donnée par la relation (5.4). Les nouveaux éléments α et β affectent très peu le mélange des deux premières générations qui est bien décrit par l'angle de Cabibbo.

En utilisant les propriétés des matrices hermitiques et des matrices de masses de Fritzsche modifié, nous avons réussi à définir rigoureusement les intervalles permis des paramètres α et β . Un résultat d'une importance énorme pour les calculs qui ont suivi. Ce résultat n'existait pas auparavant dans la littérature.

À l'aide de la méthode de projection des saveurs, nous avons exprimé les éléments de la matrice de mélange en fonction des invariants des matrices de masses. On a aussi mis en évidence, par des méthodes analytiques et numériques, la petitesse des paramètres α et β par rapport respectivement à m_t et m_b ce qui se traduit par la petitesse de ϵ_1 et ϵ_2 par rapport à 1.

Ce résultat a été crucial pour la justification de la perturbation au premier ordre des éléments de la matrice de mélange V_{KM} .

Nous avons pu reproduire les expressions de quelques éléments V_{ij} existant dans la littérature et nous avons donné des expressions plus exactes aux autres. Dans le cas du rapport $\frac{|V_{ub}|}{|V_{cb}|}$ on a mis en évidence le terme dépendant de ϵ_2 , $\sqrt{\frac{\epsilon_2 m_d m_s}{m_b^2 |V_{cb}|^2}}$, qui n'est pas du tout négligeable par rapport à $\sqrt{\frac{m_u}{m_c}}$.

Les approximations qu'on a adoptées tout au long des chapitres III et IV, sont justifiées. En fait le nombre de paramètres libres dans la matrice V_{KM}

et la complexité des expressions des V_{ij} en termes des masses des quarks et des phases des matrices de masses, rendent le recours aux approximations indispensable. Cependant, la comparaison des résultats obtenus avec les données expérimentales montre que ces relations sont très satisfaisantes. Il y aurait peu à gagner en ayant recours à des résolutions exactes ou au développement aux ordres supérieures des V_{ij} au prix d'une énorme complexité des calculs.

APPENDICE A

SYMÉTRIES DISCRÈTES ET THÉORÈME CPT

A.1 Parité P

L'opérateur de parité P est un opérateur unitaire dans l'espace d'Hilbert qui est responsable de l'inversion spatiale. En agissant sur un champ scalaire $\Phi(x)$ ou vectoriel $\Phi_\mu(x)$, l'opérateur P conduit à:

$$P^{-1}\Phi(x)P = \eta_p\Phi(x')$$

avec

$$\begin{aligned}\eta_p &= \pm 1 \\ (x')_\mu &= (x_0, -x_k) \\ (x)_\mu &= (x_0, x_k)\end{aligned}\tag{A.1.1}$$

et

$$\begin{aligned}P^{-1}\Phi_\mu(x)P &= \eta_p(\Phi_0(x'), -\Phi_k(x')) \\ &= \eta_p(\Phi_\mu) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} (\Phi_\mu(x'))\end{aligned}$$

avec

$$\eta_p(\Phi_\mu) = \pm 1\tag{A.1.2}$$

η_p décrit la parité intrinsèque du champ. Pour un champ scalaire, si $\eta_p = -1$, le champ est dit pseudoscalaire, et si $\eta_p = +1$, le champ est dit champ scalaire.

Pour un champ vectoriel Ψ_μ , si $\eta_p = +1$, le champ est dit polaire et si $\eta_p = -1$, le champ est dit axial.

Pour un champ de Dirac, $\psi(x)$, la transformation est:

$$P^{-1}\psi(x)P = \eta_p \gamma_0 \psi(x') \quad (A.1.3)$$

$$P^{-1}\psi^\dagger(x)P = \eta_p^* \psi^\dagger(x') \gamma_0 \quad (A.1.4)$$

P^2 transforme (x_μ) en (x_μ) , donc P^2 doit être soit l'identité, soit une rotation de 2π et donc $\eta_p^2 = 1$. Cependant, un champ de Dirac, ψ , se transforme comme un spineur et la rotation d'un spineur ψ de 2π donne $-\psi$. Ceci revient à dire que pour ramener ψ à sa position initiale, il faut une rotation de 4π . Donc $\eta_p^2 = \pm 1$, ce qui donne $\eta_p(\psi) = \pm 1; \pm i$.

Avec les propriétés ci-haut mentionnées, les transformations des formes bilinéaires de Dirac sont résumées dans le tableau suivant:

Tableau A.1
Transformation des champs sous la symétrie P.

	(\vec{x}, t)	$(-\vec{x}, t)$
scalaire	$\bar{\Psi}_1 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_1 \Psi_2$
pseudoscalaire	$\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2$
vecteur	$\bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \Psi_2$	$\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_2$
vecteur axial	$\bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_2$
tenseur	$\bar{\Psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \Psi_2$	$\bar{\Psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \Psi_2$

A.2 Conjugaison de charge C

On peut facilement étudier l'opération de conjugaison de charge en prenant l'équation de Dirac et en renversant le signe de la charge électrique.

Soit Ψ_c le champ de Dirac ayant la charge opposée du champ Ψ . On a

$$(i\vec{\partial} - e\vec{A} - m)\Psi = 0 \quad (A.2.1)$$

$$(i\vec{\partial} + e\vec{A} - m)\Psi_c = 0 \quad (A.2.2)$$

Dans le but de trouver la relation entre Ψ avec une charge e et Ψ_c avec une charge $-e$, prenons le complexe conjugué et puis le transposé de la 1^{ère} équation. On trouve:

$$\gamma^{\mu T}(-i\partial_\mu - eA_\mu)(\gamma^{0T}\Psi^*) = 0 \quad (A.2.3)$$

Quelle que soit la représentation de l'algèbre de Dirac, il existe une matrice C telle que:

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \quad (A.2.4)$$

En comparant avec l'équation de Ψ_c , on a une correspondance exacte (à une phase près) si on fait:

$$\Psi_c = e^{i\phi} C(\gamma^{0T}\Psi^*) = e^{i\phi} C\bar{\Psi}^T \quad (A.2.5)$$

Dans la représentation de Dirac, C qui satisfait l'équation (A.2.4) est donné par:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (A.2.6)$$

qui satisfait les contraintes suivantes:

$$-C = C^{-1} = C^T = C^\dagger \quad (A.2.7)$$

C nous permet d'identifier la structure de particule-antiparticule du champ de Dirac. En appliquant C au champ de la particule, on obtient le champ de l'antiparticule.

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \Psi_c = e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A.2.8)$$

Ceci montre que l'équation de Dirac contient les champs de la particule de l'antiparticule avec des charges et des spins renversés.

La transformation des formes bilinéaires $\bar{\Psi}\Psi$ sera:

$$C^{-1}\bar{\Psi}(x)\Psi(x)C = C^{-1}\Psi_\alpha^\dagger(x)(\gamma_0)_{\alpha\beta}\Psi_\beta(x)C$$

$$\begin{aligned}
&= C^{-1} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(x) C (\gamma_0)_{\alpha\beta} C^{-1} \Psi_{\beta}(x) C \\
&= \Psi_{\alpha}(x) (\gamma_0)_{\alpha\beta} \Psi_{\beta}^{\dagger}(x) \\
&= - \Psi_{\beta}^{\dagger}(x) (\gamma_0)_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha}(x) \\
&= \Psi_{\beta}^{\dagger}(x) (\gamma_0)_{\beta\alpha} \Psi_{\alpha}(x) \\
&= \bar{\Psi}(x) \Psi(x)
\end{aligned} \tag{A.2.9}$$

Notons que le terme vectoriel du courant, $\bar{\Psi} \gamma_{\mu} \Psi$ est impair sous la transformation C et que le terme axial du courant est pair. Par conséquence, un terme du genre $\bar{\Psi} \gamma_{\mu} (1 \pm \gamma_5) \Psi \Phi_{\mu}$ brise toujours la symétrie C .

La transformation de toutes les formes bilinéaires est résumée dans le tableau suivant:

Tableau A.2

Transformation des champs sous la conjugaison de charge C .

	(\vec{x}, t)	(\vec{x}, t)
scalaire	$\bar{\Psi}_1 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \Psi_1$
pseudoscalaire	$\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1$
vecteur	$\bar{\Psi}_1 \gamma_{\mu} \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \gamma_{\mu} \Psi_1$
vecteur axial	$\bar{\Psi}_1 \gamma_{\mu} \gamma_5 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \gamma_{\mu} \gamma_5 \Psi_1$
tenseur	$\bar{\Psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \Psi_1$

A.3 Renversement de temps

L'opération de renversement de temps est représentée par un opérateur antiunitaire T dans l'espace d'Hilbert.

Un opérateur antiunitaire est un opérateur vérifiant les relations suivantes:

$$TT^{\dagger} = 1 \tag{A.3.1}$$

$$T(\lambda_1 |1\rangle + \lambda_2 |2\rangle) = \lambda_1^* T|1\rangle + \lambda_2^* T|2\rangle \tag{A.3.2}$$

Considérons la transformation d'un champ scalaire $\Phi(x, t)$ et de son conjugué $\dot{\Phi}(x, t)$ sous l'opération de renversement de temps T .

$$T^{-1}\Phi(x)T = \eta_T \Phi(x') \quad (A.3.3)$$

$$T^{-1}\dot{\Phi}(x)T = -\eta_T \dot{\Phi}(x') \quad (A.3.4)$$

où $(x')_\eta = (-x_0, x_k)$ et la phase $\eta_T = \pm 1$. Pour les formes bilinéaires, $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$

$$\begin{aligned} T^{-1}\bar{\Psi}(x)\Psi(x)T &= T^{-1}\Psi^\dagger(x)\gamma_0\Psi(x)T \\ &= T^{-1}\Psi^\dagger(x)TT^{-1}\gamma_0TT^{-1}\Psi(x)T \\ &= \Psi^\dagger(x')i\gamma_0\gamma_5(-\gamma_0)i\gamma_0\gamma_5\Psi(x') \\ &= \bar{\Psi}(x')\Psi(x') \end{aligned} \quad (A.3.5)$$

où l'on a utilisé le fait que $T^{-1}\gamma_\mu T = -\gamma_\mu$ à cause du fait que les γ_μ sont tous imaginaires dans la représentation de Majorana.

La transformation de toutes les formes bilinéaires est résumée dans le tableau suivant:

Tableau A.3
Transformation des champs sous le renversement de temps T .

	(\vec{x}, t)	$(\vec{x}, -t)$
scalaire	$\bar{\Psi}_1\Psi_2$	$\bar{\Psi}_1\Psi_2$
pseudoscalaire	$\bar{\Psi}_1\gamma_5\Psi_2$	$-\bar{\Psi}_1\gamma_5\Psi_2$
vecteur	$\bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_2$	$\bar{\Psi}_1\gamma^\mu\Psi_2$
vecteur axial	$\bar{\Psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\Psi_2$	$\bar{\Psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\Psi_2$
tenseur	$\bar{\Psi}_1\sigma_{\mu\nu}\Psi_2$	$-\bar{\Psi}_1\sigma^{\mu\nu}\Psi_2$

A.4 Symétrie CP et théorème CPT

La transformation des champs sous l'opérateur de symétrie CP se déduit facilement à partir du tableau A.2 et du tableau A.3. Elle est résumée dans le tableau suivant:

Tableau A.4
Transformation des champs sous la symétrie CP.

	(\vec{x}, t)	$(-\vec{x}, t)$
scalaire	$\bar{\Psi}_1 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \Psi_1$
pseudoscalaire	$\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1$
vecteur	$\bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \Psi_1$
vecteur axial	$\bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_1$
tenseur	$\bar{\Psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \Psi_1$

Dans la nature, ces symétries discrètes sont brisées. La parité est maximale-ment brisée dans l'interaction électrofaible, et CP est brisée dans la désintégration des mésons K.

Cependant, il y a un théorème remarquable, le théorème CPT, qui dit que chaque théorie quantique des champs est invariante sous l'opération combinée de CPT, sous des conditions très générales.

Le théorème dit que l'hamiltonien \mathcal{H} est invariant sous CPT:

$$(CPT)\mathcal{H}(x)(CPT)^{-1} = \mathcal{H}(x') \quad (A.4.1)$$

si les conditions suivantes sont satisfaites:

1- la théorie doit être locale, possédant un lagrangien hermitique et doit être invariante sous les transformations propres de Lorentz.

2- la théorie doit être quantifiée avec des commutateurs, pour les champs de spin entier et avec des anticommutateurs pour les champs de spin demi-entier.

La transformation des champs sous la symétrie CPT est résumée dans le tableau suivant:

Tableau A.5
Transformation des champs sous la symétrie CPT.

	(\vec{x}, t)	$(-\vec{x}, -t)$
	c	c^*
scalaire	$\bar{\Psi}_1 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \Psi_1$
pseudoscalaire	$\bar{\Psi}_1 \gamma_5 \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \gamma_5 \Psi_1$
vecteur	$\bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \gamma^\mu \Psi_1$
vecteur axial	$\bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_2$	$-\bar{\Psi}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_1$
tenseur	$\bar{\Psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \Psi_2$	$\bar{\Psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \Psi_1$

où c est un nombre complexe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Particle Data Group, Review of Particle Properties, Phys. Rev. D **45** (1994), 1173.
- [2] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1264.

A. Salam, Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analicity, (Nobel Symposium NO. 8) edited by N. Svartholm, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968, p. 367.
- S. Glashow, *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961), 579.
- [3] C. Jarlskog, *CP Violation edited by C. Jarlskog*, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, vol. 3, World Scientific, Singapore, 1989.

S. Weinberg, A festschrift for I. I. Rabi edited by L. Motz, New York Academy of Sciences, New York, 1977.
- [4] F. Halzen et A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, New York Wiley, 1984.
- [5] M. Kobayashi et T. Maskawa, *CP-Violation in the renormalizable theory of weak interaction.*, Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 652.
- [6] H. Fritzsch, *Weak interaction mixing in the six-quark theory*, Phys. Lett **73B** (1977), 317.

———, *Quark masses and flavor mixing*, Nucl. Phys. **B155** (1979), 189.
- L. F. Li, *Comments on the derivation of the mixing angles*, Phys. Lett. **84B** (1979), 461.
- B. Stech, *Quark masses, charged current mixing angles and CP violation*, Phys. Lett. **130 B** (1983), 189.

- M. Gronau, R. Johnson et J. Schechter, *Maximal CP violation*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 2176.
- G. C. Branco et L. Lavoura, *Ansatz for the quark mass matrices allowing for a high top quark mass*, Phys. Rev. **D44** (1991), 582.
- S. Dimopoulos, L. J. Hall et S. Raby, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 1984.
- , Phys. Rev. **D45** (1992), 4192.
- X.G. He et W. S. Hou, Phys. Rev. **D41** (1990), 1517.
- R. E. Shrock, Phys. Rev. **D45** (1992), 10.
- [7] C. H. Albright, B. A. Lindholm et C. Jarlskog, *Three-family Fritzsche and Stech models with minimal and two-doublet Higgs structures*, Phys. Rev. **D38** (1988), 872.
- , *Testing the Fritzsche quark mass matrices with the invariant function approach*, Phys. Lett. **B 199** (1987), 553.
- [8] F. Abe et al, *Evidence for top quark production in anti-p p collisions at $\sqrt{s} = 1.8 - TEV$* , Phys. Rev. **D50** (1994), 2966.
- [9] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
- [10] N. Cabibbo, *Unitary symmetry and leptonic decays*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 531.
- [11] L. Maiani, *CP violation in purely lefthanded weak interactions*, Phys. Lett. **B 62** (1976), 183.
- , *Proc. Lepton-Photon Symp.*, International Symposium on Lepton and Photon Interactions edited by W. Bartel et R. Rückl Hamburg West Germany, 1977, p. 867.
- L. L. Chu et W. Y. Keung, *Comments on the parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 1802.
- M. Gronau et J. Schechter, *ibid* **54** (1985), 385.
- H. Fritzsch, *How to describe weak-interaction mixing and maximal CP violation*, Phys. Rev. **D 32** (1985), 3058.

- H. Harari et M. Leurer, *Recommending a standard choice of Cabibbo angles and KM phases for any number of generations*, Phys. Lett. **B 181** (1986), 123.
- [12] Particle Data Group, *The Cabibbo-Kobayashi-Maskawa mixing matrix*, Phys. Rev. **D 45** (1994), 1315.
- [13] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 1945.
- [14] C. Hamzaoui, *Measure of CP nonconservation and its consequences on the structure of the Kobayashi-Maskawa matrix*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 35.
- [15] A. Campa, C. Hamzaoui et V. Rahal, *New parametrization of the Kobayashi-Maskawa matrix and its implications*, Phys. Rev. **D 39** (1989), 3435.
- [16] O. W. Greenberg, *Rephase invariant formulation of CP violation in the Kobayashi-Maskawa framework*, Phys. Rev. **D 32** (1985), 1841.
- [17] C. Jarlskog, *Commutator of the quark mass matrices in the standard electroweak model and a measure of maximal CP nonconservation*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), 1039.
- , *Flavor projection operators and applications to CP violation with any number of families*, Phys. Rev. **D 36** (1987), 2128.
- [18] S. Rajpoot, *Evading the top mass bound in the Fritzsch scheme*, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992), 309.
- Dongsheng Du and Zhi-zhong Xing, *Quark mass matrices with full first-order perturbation*, Phys. Rev. **D48** (1993), 2349.
- B. M. Bensalem, C. Hamzaoui, F. Lemay and S. Rajpoot, *A heavy top quark in a modified Fritzsch scheme of mass matrices*, UQAM-PHE/ 94-07 (1994).
- E. Boridy, C. Hamzaoui, F. Lemay and J. Lindig, *A detailed analysis of a modified Fritzsch scheme of mass matrices*, UQAM-PHE/ 94-10 hep-ph/9410298 (1994).
- [19] C. Hamzaoui, J.L. Rosner, and A.I. Sanda, *Proc. of The Workshop on High Sensitivity Beauty Physics at Fermilab*, edited by A.J. Slaughter et al., Fermilab, Batavia, IL, 1988, p. 165.
- [20] Communication privée avec M.M. Vogin (M.I.T).